Ode à Arcsinus (et à Wallis).
Pour Olivier Bouverot

Valentin Moguérou
valentin.moguerou@universite-paris-saclay.fr

Merci pour cette année ! ! !

Je vous apprécie au moins autant que la fonction arcsinus, et c'est pas peu dire...
je vais vous l'expliquer dix points.

1 Introduction

La fonction sin réalise une bijection de $[-\pi/2, \pi/2]$ dans $[-1, 1]$, elle possède donc une bijection réciproque arcsin de $[-1, 1]$ dans $[-\pi/2, \pi/2]$. Celle-ci est dérivable, par théorème de la bijection dérivable, sur l'intervalle $]-1, 1[$ et on a

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On définit de manière analogue arccos, et on a

$$\forall x \in [-1, 1] \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

On voit immédiatement que ces deux fonctions sont de régularité $\mathscr{C}^\infty(]-1, 1[)$.

Remarque : surjections, sections et joyeusetés La fonction $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective. On sait qu'il existe alors des fonctions s (appelées sections de sin) telles que $\sin(s(x)) = x$ pour tout $x \in [-1, 1]$, autrement dit ce sont des inverses à droite de sin pour la composition.
Si s_1 et s_2 sont deux sections d'une même surjection (ici, de sin), alors il faut et il suffit que $s_1([-1, 1]) = s_2([-1, 1])$ pour que $s_1 = s_2$. En effet, la fonction sin définit une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$ par $\alpha \sim \beta \iff \sin\alpha = \sin\beta$, et des sections viennent « piocher » un représentant par classe d'équivalence par construction.
La fonction arcsin est donc l'unique section de sin d'image directe $[-\pi/2, \pi/2]$.

Remarque historique Aujourd'hui, on note indifféremment arcsin et Arcsin. Mais selon [2], arcsin désigne la correspondance réciproque de la fonction sin, ce n'est donc pas une application mais plutôt une multifonction.
La « détermination principale » de cette fonction est quant à elle notée Arcsin, c'est bien la section de sin d'image directe $[-\pi/2, \pi/2]$.

2 Le coefficient binomial central

On appelle coefficient binomiaux centraux les quantités $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}$.
La série génératrice des coefficients binomiaux centraux est définie par

$$C(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} x^n.$$

Lemme 1. *On a*

$$\binom{2n+2}{n+1} = 4\frac{n+1/2}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

Proposition 1. *Le rayon de convergence de la série $C(x)$ est $1/4$, et on a*

$$\forall x \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[\qquad C(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}.$$

Démonstration. Pour le rayon de convergence, on peut appliquer la règle de d'Alembert puisque d'après le lemme, on a

$$\frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} \longrightarrow 4.$$

Pour z dans le disque ouvert de convergence, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} 4^n z^n.$$

On conclut par un calcul classique. □

Donnons une application. La formule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2(n-k)}{n-k} = 4^n$$

suit immédiatement de l'identification

$$\frac{1}{1-4x} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-4x}}\right)^2$$

en développant les séries entières (avec un produit de Cauchy).
On a aussi a formule

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

obtenue par identification de coefficients binomiaux dans l'écriture $(1+X)^{2n} = (1+X)^n(1+X)^n$.

Proposition 2. *La fonction* arcsin *est développable en série entière, de rayon* 1 *et on a*

$$\arcsin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n} x^{2n+1}.$$

Démonstration. Par intégration de

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^{2n}.$$

□

Une application : calculer π rapidement.

Proposition 3. *On a*

$$\pi = 3\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{16^n(2n+1)}\binom{2n}{n}$$

Démonstration. Se souvenir que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$. □

3 La complexité arithmétique de la factorisation (mon oral Info ULSR)

Dans toute cette section, les nombres sont encodés sur n bits et on compte les opérations arithmétiques comme des opérations élémentaires.

Le calcul des coefficients binomiaux Pour calculer efficacement un coefficient binomial, on se souvient de l'identité du binôme de Newton

$$(2^\ell + 1)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} 2^{\ell k}.$$

Cela se calcule via l'exponentiation rapide en $O(n)$, puis on extrait les bits dans l'écriture binaire pour retenir le coefficient binomial.

Après l'exponentiation rapide, la factorielle rapide ! Les coefficients binomiaux centraux vont nous aider, puisque

$$(2n)! = \binom{2n}{n} n!^2$$

Ainsi, si on connaît les coefficients binomiaux centraux, on a un algorithme rapide de calcul de la factorielle.

— Si n est pair, on applique la formule

— Si n est impair, on écrit $n! = n(n-1)!$

Reste à calculer tous les coefficients binomiaux. Sauf que les ayant calculés avec l'exponentiation rapide, on peut mémoriser la trace de son exécution (qui se base sur le même principe de cas pair/impair) pour ne faire qu'une exécution de l'algorithme.
Cela donne un calcul de la factorielle en $O(n)$.

Le problème de factorisation Étant donné $N = PQ$, où P, Q sont deux nombres premiers distincts ($P < Q$), on se demande comment calculer efficacement Q.
Étant donné $1 \leqslant k \leqslant N$, déterminer si $N \mid k!$ a le coût d'une opération élémentaire (modulo) et du calcul de la factorielle.
Cette donnée nous sert ensuite par dichotomie à trouver Q, puisque $N \mid k!$ si et seulement si $k \geqslant Q$.

4 Les intégrales de Wallis

On définit la suite des intégrales de Wallis par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Proposition 4. *On a*

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta \, \mathrm{d}\theta.$$

Démonstration. Simple changement de variable $u = \dfrac{\pi}{2} - \theta$. □

Proposition 5. *On a pour tout n,*

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
W_{n+2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{n+2} \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin\theta \sin^{n+1} \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= \left[-\cos\theta \sin^{n+1} \theta\right]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} -(n+1)\cos^2\theta \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \sin^2\theta) \sin^n \theta \, \mathrm{d}\theta \\
&= (n+1)(W_n - W_{n+2})
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Proposition 6. *On a, pour tout n,*

$$(n+1) W_n W_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

Démonstration. D'après la proposition précédente, la suite $((n+1)W_nW_{n+1})$ est clairement constante, donc elle vaut $\pi/2$. □

Proposition 7. *On a pour tout n*

$$W_{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} = \frac{\pi}{2}\frac{(2n)!}{2^{2n}\,n!^2}\ ;$$

$$W_{2n+1} = \frac{n!^2\,2^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Démonstration. Le premier point résulte d'une récurrence immédiate, le second de la proposition précédente. □

Lemme 2. *La suite (W_n) est décroissante.*

Lemme 3. *On a*

$$W_n \sim W_{n+1}.$$

Démonstration. On a $W_n \leqslant W_{n+1} \leqslant W_{n+2}$ et $W_{n+2} \sim W_n$, donc on a le résultat par encadrement. □

Proposition 8. *On a*

$$W_n \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration. Utiliser $W_nW_{n+1}(n+1) = \pi/2$ et le lemme précédent. □

Proposition 9 (Série génératrice des termes pairs)**.** *On a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n}x^{2n} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad R = 1.$$

On donnera plus tard l'expression de la série génératrice des termes impairs.
Par suite

$$\arcsin x = \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

5 Un calcul de $\zeta(2)$

Puisque

$$\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\quad \arcsin(\sin\theta) = \theta$$

on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n}(\sin\theta)^{2n+1} = \theta.$$

On intègre des deux côté, la convergence normale nous accorde la licéité de l'interversion.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n}(\sin\theta)^{2n+1}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi^2}{8}.$$

Or le terme de gauche vaut

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n(2n+1)}\binom{2n}{n}W_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{\pi(2n+1)}W_{2n}W_{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Or

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{1}{4}\zeta(2) + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}.$$

D'où

$$\frac{3}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{8}$$

puis

Proposition 10.

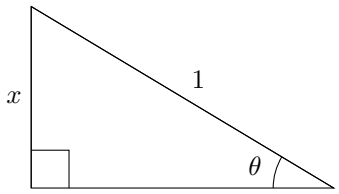
$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.}$$

6 Balade aux pays des triangles et des termes impairs

Lemme 4 (Une autre expression utile de arcsinus)**.** *On a*

$$\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. Un calcul rapide (et très amusant) de dérivées permet de conclure, mais cela a l'inconvénient de ne pas nous dire d'où vient la formule.



Observons cette figure. On a d'un côté $\sin\theta = x$ donc $\arcsin x = \theta$.
D'après le théorème de Pythagore, le côté adjacent à l'angle mesure $\sqrt{1-x^2}$. D'où

$$\tan\theta = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a donc bien

$$\boxed{\arcsin x = \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

□

Démontrons désormais l'identité suivante.

Proposition 11. *On a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad R = 1.$$

Démonstration. Allons-y vaillamment.

$$\begin{aligned} S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n+1} x^{2n+1} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta) x^{2n+1} \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} \cos^{2n+1}(\theta) x^{2n+1} \, \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{x\cos\theta}{1-(x\cos\theta)^2} \, \mathrm{d}\theta. \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{x\cos\theta}{1-x^2(1-\sin^2\theta)} \, \mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

On pose le changement de variable $u = x\sin\theta$. On a $\mathrm{d}u = x\cos\theta \mathrm{d}\theta$ d'où

$$\begin{aligned} S(x) &= \int_0^x \frac{1}{1-x^2+u^2} \, \mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

$$\boxed{S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n+1} x^{2n+1} = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

□

Proposition 12. *On a*

$$\arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{2n-1}}{n} x^{2n}$$

Démonstration. On a

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2}\arcsin^2 x\right) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=1}^{+\infty} W_{2n-1}x^{2n-1}$$

puis on intègre. □

On peut aussi écrire

$$\boxed{\arcsin^2 x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{W_{2n-1}}{n}x^{2n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(2x)^{2n}}{2n^2\binom{2n}{n}}.}$$

En particulier

$$\boxed{\frac{\pi^2}{18} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}.}$$

(car $\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2}$)
On peut aussi écrire

$$\boxed{\zeta(2) = 3\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2\binom{2n}{n}}.}$$

On a significativement accéléré la convergence de la série.

7 Un calcul d'intégrale

On se propose de calculer l'intégrale

$$I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + x\sin\theta} \quad \text{pour } |x| < 1.$$

On a

$$\begin{aligned} I(x) &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + x\sin\theta} \\ &= \int_0^{\pi/2} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (x\sin\theta)^n \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n \int_0^{\pi/2} \sin^n\theta \,\mathrm{d}\theta \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n W_n x^n \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} I(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n}x^{2n} - \sum_{n=0}^{+\infty} W_{2n+1}x^{2n+1} \\ &= \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned}$$

Enfin

Proposition 13. *Si* $|x| < 1$:

$$\boxed{I(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{1 + x\sin\theta} = \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Par des méthodes similaires j'ai obtenu

$$\boxed{\arcsin^2 x = -\int_0^{\pi/2} \frac{\ln\left(1 - x^2\sin^2\theta\right)}{\sin\theta} \,\mathrm{d}\theta.}$$

8 Le produit de Wallis

Dans la suite on notera

$$P_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)(2k)}{(2k-1)(2k+1)} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1}.$$

Proposition 14.

$$P_n \longrightarrow \prod_{k=1}^{+\infty} \frac{(2k)^2}{(2k)^2-1} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette identité est la formule de Wallis.

Démonstration. On décompose

$$P_n = \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}\right).$$

On vérifie que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{4^n n!}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} = \frac{4^n n!}{(2n+1)!}$$

D'où

$$P_n = {W_{2n+1}}^2(2n+1) \longrightarrow \frac{\pi}{2}.$$

□

Application Calcul de la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Cette série converge bien par critère spécial des séries alternées.
De plus

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{p=1}^{2n}(-1)^p \ln\left(1+\frac{1}{p}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2p}\right) - \sum_{p=1}^{n} \ln\left(1+\frac{1}{2p-1}\right) \\ &= \ln\left(\prod_{p=1}^{n} \frac{1+1/(2p)}{1+1/(2p-1)}\right) \\ &= \ln(1/P_n) \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\frac{2}{\pi}.}$$

De plus, on montre que

$$\int_0^1 \frac{(-1)^{\lfloor 1/x \rfloor}}{x}\,\mathrm{d}x = \ln\frac{2}{\pi}.$$

9 Le calcul du volume de l'hypersphère

On notera V_n le volume de la boule unité (pour la norme euclidienne) en dimension n. Par convention $V_0 = 1$ (la mesure de Hausdorff en dimension 0 n'est-elle pas la mesure de comptage) ?
Obtenons une relation de récurrence.
Pour passer de V_n à V_{n+1}, on intègre sur une direction, et on somme des « tranches » de largeur $\mathrm{d}z = \cos\theta \mathrm{d}\theta$, d'où

$$V_{n+1} = 2\int_0^{\pi/2} \underbrace{V_n \cos^n\theta}_{\text{base}} \underbrace{\cos\theta\ \mathrm{d}\theta}_{\text{hauteur}}$$

d'où

$$V_{n+1} = 2V_n W_{n+1}.$$

Autrement dit

$$\boxed{V_n = 2^n \prod_{k=1}^{n} W_k.}$$

On peut obtenir une égalité plus jolie :

$$\boxed{V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.}$$

En effet, si l'on note

$$u_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)},$$

on a clairement

$$u_{n+2} = \frac{\pi}{n/2+1} u_n$$

et cette relation est aussi vérifiée par (V_n).
Il reste à vérifier à la main pour $n = 0, 1$. Pour 0, c'est clair, et pour $n = 1$, on a $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ d'où l'égalité.
On remarque que ce volume tend vers 0, au grand dam de cet étudiant en école d'ingénieur qui pensait pouvoir piocher informatiquement un point aléatoire de la boule unité en dimension n par essai-erreur dans le cube circonscrit.

10 Pour terminer : la loi de l'Arcsinus sur les marches aléatoires sur $\mathbb{Z}$

10.1 Marche aléatoire

L'étudiant de la section précédente, très déçu de ne pas avoir réussi à faire tourner son programme, décide de noyer son échec dans la bière.
Il part du pub, et fait aléatoirement des pas de droite à gauche. Il a une probabilité p d'aller à droite et $q = 1 - p$ d'aller à gauche.
On modélise le problème avec des variables aléatoires X_k iid, où

$$\mathbb{P}(X_k = 1) = p \quad ; \quad \mathbb{P}(X_k = -1) = q.$$

La position de l'étudiant est donc repérée par la somme

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

(par convention $S_0 = 0$)
On note $B_k = (X_k + 1)/2$. C'est une loi de Bernoulli, d'où

Lemme 5. *On a*

$$\mathbb{E}(X_k) = 2p - 1 \quad ; \quad V(X_k) = 2p(1-p)$$

Proposition 15. *On a*

$$\mathbb{E}(S_n) = n(2p-1) \quad ; \quad V(X_k) = 2np(1-p)$$

On note $a_n = \mathbb{P}(S_{2n} = 0)$.

Proposition 16. *On a*

$$a_n = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Démonstration. Écrire $\mathbb{P}(S_{2n} = 0) = \mathbb{P}\Big(\sum_{k=1}^{2n} B_k = n\Big)$. □

En notant $A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$ on a

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4pqx^2}}, \quad R = 1/(4pq)$$

Notons à présent $b_n = \mathbb{P}((S_1 \neq 0) \cap \cdots \cap (S_{2n-1} \neq 0) \cap S_{2n} = 0)$ la probabilité que le premier retour à zéro non initial soit au temps $2n$ (en particulier $b_0 = 0$).
En décomposant b_n selon l'indice du premier retour à l'origine on trouve

$$\forall n \geqslant 1, a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k a_{n-k}.$$

Notons

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^{2n}.$$

On a

$$A(x)B(x) = A(x) - 1$$

d'où

$$B(x) = 1 - \sqrt{1-4pqx^2}, \quad R \geqslant 1/(4pq) \quad (\text{car } b_n \leqslant a_n)$$

On en déduit que la probabilité de non retour à zéro vaut $|p-q|$, nulle quand $p = 1/2$.

10.2 Loi de l'arcsinus

Dans la suite on prend $p = 1/2$.
En notant $T_{2n} = \max\{0 \leqslant k \leqslant 2n \mid S_k = 0\}$ (dernier retour à l'origine), on montre dans [3] que

$$\mathbb{P}\left(\frac{T_{2n}}{2n} \in [\alpha, \beta]\right) \longrightarrow \frac{2}{\pi}(\arcsin\sqrt{\beta} - \arcsin\sqrt{\alpha}).$$

Par exemple, $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(T_{2n}/2n \leqslant 1/2) = 1/2$. La probabilité qu'il n'y ait pas de retour à l'origine avant la moitié de la course tend vers $1/2$.

Conclusion

Nous avons donc montré que la fonction arcsinus, ainsi que les coefficients binomiaux centraux et les intégrales de Wallis ont toute leur importance en Mathématique.
Je vous souhaite une bonne année, à vous et à vos élèves.

Références

[1] René Adad. Coefficient binomial central : un aperçu.

[2] Cagnac, Ramis, and Commeau. *Traité de Mathématiques spéciales.* Masson, 1972.

[3] Concours Centrale-Supélec. Mathématiques 2 psi, 2023.

[4] Concours communs INP. Mathématiques 1 mp, 2024.