

Rapport de l'équipe $\mathbb{KRD}$

$\mathbb{K}$arré d'or

Problème 1 : Philatélie

Résumé

Nous prenons le parti de démontrer un lemme essentiel, généralisable à n'importe quelle forme de paquet, non nécessairement polygonale, et qui servira dans toutes les questions ou presque. Il s'agit de montrer que tout tampon d'aire maximale touche nécessairement la frontière du paquet.
Dans la question 2, nous montrons que dans un polygone convexe, il y a soit une, soit une infinité de configurations maximales. Cela suit du fait que dans un polygone convexe, tout bipoint définit un segment inclus dans le polygone.
Dans la question 3, on prend l'exemple d'une figure dans laquelle $A_{dis} > A_g$ et on conjecture une majoration du ratio.
Dans la question 4, on montre par ailleurs que $A_g = A_{dis}$ dans les trois exemples de l'énoncé.

Dans tout le problème, nous nous plaçons dans un repère orthonormal fixé.
Pour commencer, démontrons un lemme essentiel à tout ce qui va suivre.

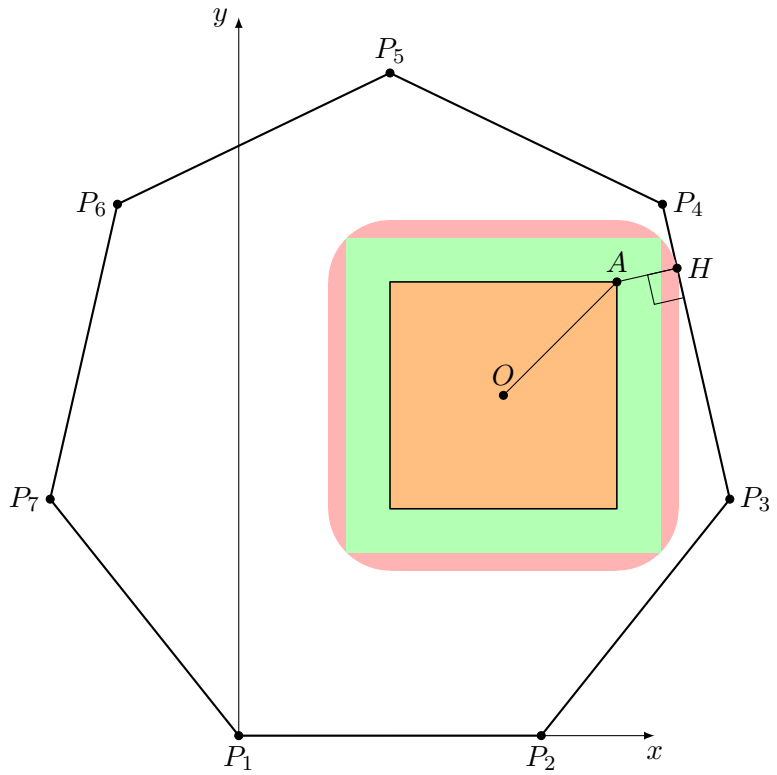


FIGURE 1 – Heptagone régulier

Lemme 1. *Quelle que soit la forme du paquet, s'il est d'aire maximale, alors le tampon touche la frontière du paquet.*

Démonstration. **Raisonnons par l'absurde.** Supposons qu'il existe un tampon $\mathscr{T}$ d'aire maximale qui ne soit pas en contact avec la frontière du paquet $\mathscr{P}$, laquelle sera désignée par $\mathscr{F}$. On a donc :

$$\min\{\mathrm{d}(A,H) : (A,H) \in \mathscr{T} \times \mathscr{F}\} > 0.$$

Soit O le centre du tampon $\mathscr{T}$. Soit $(A,H) \in \mathscr{T} \times \mathscr{F}$ tel que la distance AH soit minimale. On a $AH > 0$. H est donc un point de $\mathscr{F}$ le plus proche de $\mathscr{T}$.

Considérons l'ensemble :

$$\mathscr{M} = \{M \in \mathscr{P} \mid \mathrm{d}(M,\mathscr{T}) \leqslant AH\}$$

Or, trivialement, pour tout point M de $\mathscr{T}$, $\mathrm{d}(M,\mathscr{T}) = 0$. On a donc :

$$\mathscr{T} \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{P}.$$

Sur la figure 1, le tampon $\mathscr{T}$ est représenté en orange, la marge $\mathscr{M}$ est représentée en rouge, et le paquet $\mathscr{P}$ est représenté par l'heptagone.

Soit c la longueur d'un côté du tampon. La diagonale du tampon vaut donc $\sqrt{2}c$. Soit $\mathscr{T}'$ le carré de centre O et de diagonale $\sqrt{2}c + AH$ (représenté en vert sur la figure 1). On a $\mathscr{T}' \subset \mathscr{M}$ car la distance maximale d'un point du carré englobant au carré plus petit centré en le même point est la différence de leurs diagonales, soit AH. Les deux tampons $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ étant centrés en un même point, la distance d'un point de la frontière de $\mathscr{T}'$ à $\mathscr{T}$ est inférieure à la différence de

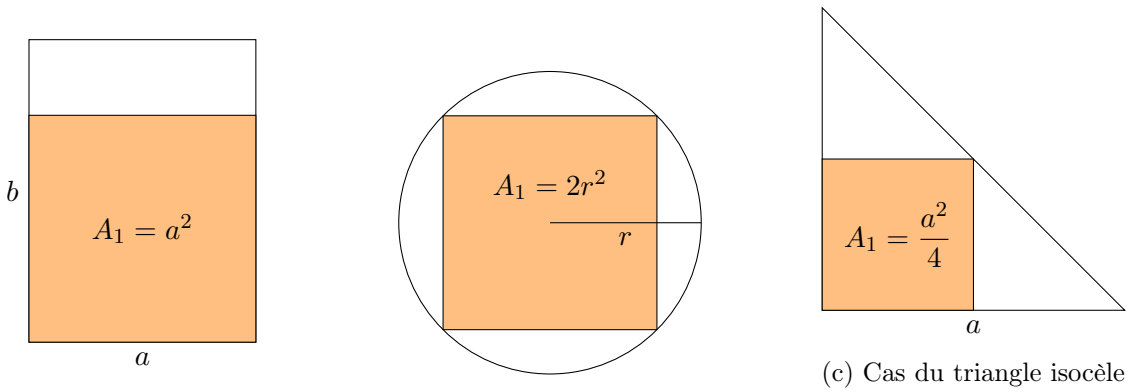
diagonales de $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}$, soit AH. Ainsi, pour tout point M de $\mathscr{T}'$, on a $\mathrm{d}(M, \mathscr{T}) \leqslant AH$, donc $M \in \mathscr{F}$.

Ainsi $\mathscr{T}' \subset \mathscr{M} \subset \mathscr{P}$. Or la diagonale de $\mathscr{T}'$ étant strictement supérieure à la diagonale de $\mathscr{T}$, l'aire de $\mathscr{T}'$ est strictement supérieure à la diagonale de $\mathscr{T}$. Ainsi l'aire de $\mathscr{T}$ n'est pas maximale : il y a contradiction. En conclusion, **si un tampon est d'aire maximale, il touche nécessairement la frontière du paquet**.

□

1 Question 1

Notons A_1 l'aire maximale d'un tampon dans une figure géométrique fixée. Représentons géométriquement les situations :



(a) Cas du rectangle où $a < b$ (b) Cas du disque (c) Cas du triangle isocèle rectangle

FIGURE 2 – Représentations géométriques des solutions optimales

Proposition 1. *Quelques exemples de maximalisation de tampons :*

1. *Dans un rectangle de côtés a et b, où a est le plus petit côté, l'aire maximale d'un tampon est a^2 ;*
2. *Dans un disque de rayon r, l'aire maximale d'un tampon est $2r^2$;*
3. *Dans un triangle isocèle rectangle de côté a, l'aire maximale d'un tampon est $\dfrac{a^2}{4}$.*

Démonstration. Montrons que ces solutions sont bien optimales.

1. Il est clair que le tampon et le rectangle englobant partagent deux côtés. On a $a \neq b$, donc soit $a < b$, soit $a > b$. Si $a < b$ (resp. $a > b$), le carré de côté a^2 (resp. b^2) tient dans le rectangle englobant et a une aire maximale. Il en résulte que $\boxed{A_1 = (\min\{a, b\})^2}$
2. Il s'agit de maximiser la diagonale du tampon. Or, la diagonale du carré inscrit à un cercle, c'est son diamètre. Le tampon a donc pour diagonale $2r$. Notons c la longueur du côté du tampon. Par le théorème de Pythagore, $c^2 + c^2 = (2r)^2 = 4r^2$ donc $\boxed{A_1 = c^2 = 2r^2}$.
3. Le coin inférieur gauche du tampon et du paquet sont nécessairement les mêmes, sans quoi un simple déplacement du tampon rendrait possible une augmentation de sa taille. Dès lors, l'aire maximale du tampon est atteinte en $\boxed{A_1 = a^2/4}$, soit la moitié de l'aire du paquet.

□

2 Question 2

Rappel 1. Dans un polygone convexe P, on a :

$$\forall (A, B) \in P^2 \qquad [AB] \subset P$$

Autrement dit, dans un polygone convexe, il est possible de relier chaque couple de points par un segment inclus dans le polygone.

Notation 1. Soit $\vec{u}$ un vecteur.

— Pour tout point M, notons $t_{\vec{u}}(M)$ l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$;

— Pour tout ensemble E de points, notons $t_{\vec{u}}(E)$ l'ensemble

$$\{t_{\vec{u}}(M) : M \in E\}$$

Proposition 2. *Pour un paquet polygone convexe, s'il existe deux positions distinctes maximales du tampon, alors il en existe une infinité non dénombrable, c'est-à-dire autant que de réels.*

Démonstration. Soit P un polygone dans lequel il existe deux tampons $\mathscr{T}_0$ et $\mathscr{T}_1$, chacun d'aire maximale. Alors on a $\mathscr{A}(\mathscr{T}_0) = \mathscr{A}(\mathscr{T}_1)$. Soient O_0 et O_1 les centres respectifs des tampons $\mathscr{T}_0$ et $\mathscr{T}_0$. Les tampons $\mathscr{T}_0$ et $\mathscr{T}_1$ étant tous deux parallèles aux axes, le tampon $\mathscr{T}_1$ est l'image du tampon $\mathscr{T}_0$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{O_0O_1}$. Soit $x \in]0\,;1[$ et notons $\mathscr{T}_x = t_{x\overrightarrow{O_0O_1}}(\mathscr{T}_0)$. Montrons que le tampon $\mathscr{T}_x$ est inclus dans P.

Soit M un point de $\mathscr{T}_x$. Alors il existe un point M_0 de $\mathscr{T}_0$ et un point M_1 de $\mathscr{T}_1$ tels que :

$$\overrightarrow{M_0M} = x\overrightarrow{O_0O_1} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MM_1} = (1-x)\overrightarrow{O_0O_1}$$

Cela tient à ce que $\mathscr{T}_x = t_{x\overrightarrow{O_0O_1}}(\mathscr{T}_0)$ et que $\mathscr{T}_1 = t_{\overrightarrow{O_0O_1}}(\mathscr{T}_0)$, donc $\mathscr{T}_1 = t_{(1-x)\overrightarrow{O_0O_1}}(\mathscr{T}_x)$.

Ainsi $M \in [M_0M_1]$, avec $M_0 \in \mathscr{T}_0$ et $M_1 \in \mathscr{T}_1$. Le polygone P étant convexe, on a $[M_0M_1] \subset P$ donc $M \in P$. Le point M étant quelconque :

$$\forall M \in \mathscr{T}_x \quad M \in P \qquad \text{donc} \qquad \mathscr{T}_x \subset P$$

Or $\mathscr{A}(\mathscr{T}_x) = \mathscr{A}(\mathscr{T}_0)$, donc $\mathscr{T}_x$ est aussi un tampon d'aire maximale.

Les tampons $\mathscr{T}_x$ pour $x \in]0\,;1[$ étant deux à deux distincts, il existe autant de tampons d'aire maximale que de réels dans l'intervalle $[0\,;1]$, c'est-à-dire une infinité non dénombrable. □

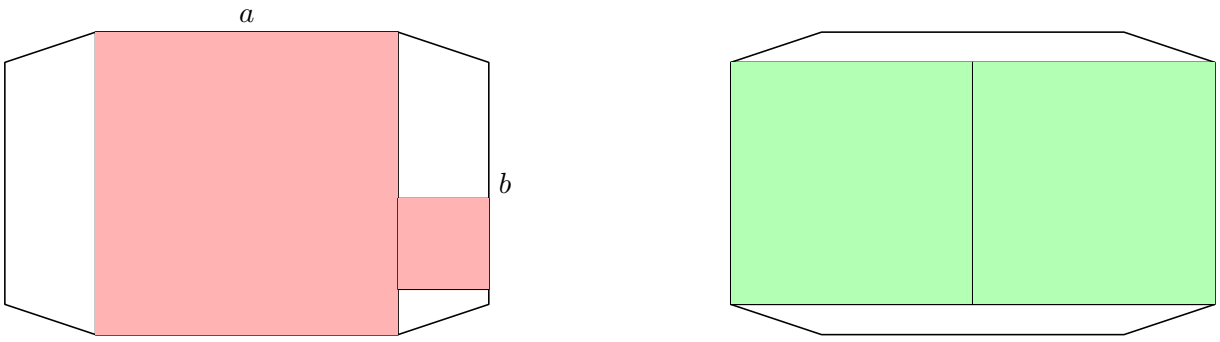
Corollaire 1. *Dans un paquet polygone convexe, il existe soit une, soit une infinité non dénombrable de façons d'inscrire un tampon d'aire maximale.*

Reprenons les exemples de la question 1 :

— Dans le premier cas, on a soit $a = b$, soit $a \neq b$. Dans le premier cas, il n'y a qu'une façon d'inscrire un tampon d'aire maximale. Dans le second cas, il y a au moins deux façons (en haut et en bas), donc une infinité ;

— Dans le second cas, il n'y a qu'une seule façon possible, car le diamètre est la seule diagonale maximale possible, ce qui ne fait qu'une façon possible ;

— Dans le troisième cas, il est nécessaire que le tampon touche le coin inférieur gauche et la diagonale, ce qui ne constitue qu'une façon possible.



(a) $A_g = 17{,}44\,\text{cm}^2$ (b) $A_{dis} = 20{,}48\,\text{cm}^2$

FIGURE 3 – Cas de figure où $A_{dis} > A_g$

3 Question 3

Proposition 3. *On n'a pas toujours $A_{dis} = A_g$.*

Démonstration. Prenons l'exemple de la figure 3.

La largeur totale de la figure vaut $2b$, et sa hauteur vaut a. On a $0 < b < a$. Dans la stratégie déterminant A_g, on a $A_g = a^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2$, alors que $A_{dis} = 2b^2$. On a donc :

$$\frac{A_{dis}}{A_g} = \frac{2b^2}{a^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2}$$

On peut faire s'approcher b de a autant que l'on veut, on a donc :

$$\begin{aligned}
\lim_{\substack{b \to a \\ b<a}} \frac{2b^2}{a^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)^2} &= \frac{2a^2}{a^2 + \left(a - \frac{a}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2a^2}{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \\
&= \frac{2a^2}{a^2 + \frac{a^2}{4}} \\
&= \frac{2a^2}{\frac{5a^2}{4}} \\
&= \frac{2a^2}{\frac{5a^2}{4}} \\
&= \frac{8a^2}{5a^2} \\
&= \frac{8}{5}
\end{aligned}$$

On peut donc conjecturer que ce ratio reste inférieur et peut s'approcher de $\frac{8}{5}$.

□

4 Question 4

4.1 Cas du rectangle

On supposera que $a \leqslant b$. Premier cas : $b \leqslant 2a$

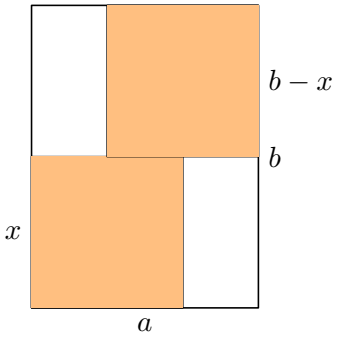


FIGURE 4 – Tentative de maximalisation de A_{dis}

On fait varier x sur l'intervalle $[b-a\,;a]$. L'aire du rectangle nous est donnée par la fonction $\mathscr{A}$ définie par :

$$\begin{aligned}\mathscr{A}(x) &= x^2 + (b-x)^2 \\ &= x^2 + b^2 - 2bx + x^2 \\ &= 2x^2 - 2bx + b^2\end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in [b-a\,;a]$:

$$\mathscr{A}'(x) = 4x - 2b$$

x	$b-a$		$\frac{1}{2}b$		a
Signe de $\mathscr{A}'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $\mathscr{A}$	$\mathscr{A}(a)$	↘	$\frac{b^2}{2}$	↗	$\mathscr{A}(b-a)$

FIGURE 5 – Étude de la fonction $\mathscr{A}$

Or $\mathscr{A}(a) = a^2 + (b-a)^2 = \mathscr{A}(b-a)$. Ainsi, l'aire maximale A_{dis} étant atteinte en $x = a$ ou $x = b - a$, un des deux tampons est d'aire maximale. On a donc : $A_{dis} = A_g = a^2 + (b-a)^2$.

Dans le deuxième cas, on a $b \geqslant 2a$. On peut donc poser sans problème deux tampons, chacun d'aire maximale, pour une aire totale $A_{dis} = A_g = 2a^2$.

Dans tous les cas, dans un rectangle, on a toujours $A_{dis} = A_g$.

4.2 Cas du disque

Raisonnement préliminaire Déterminons A_g. On se ramène au disque de centre O et de rayon 1.

Rappelons la configuration maximisant l'aire d'un timbre (question 1.c.) :

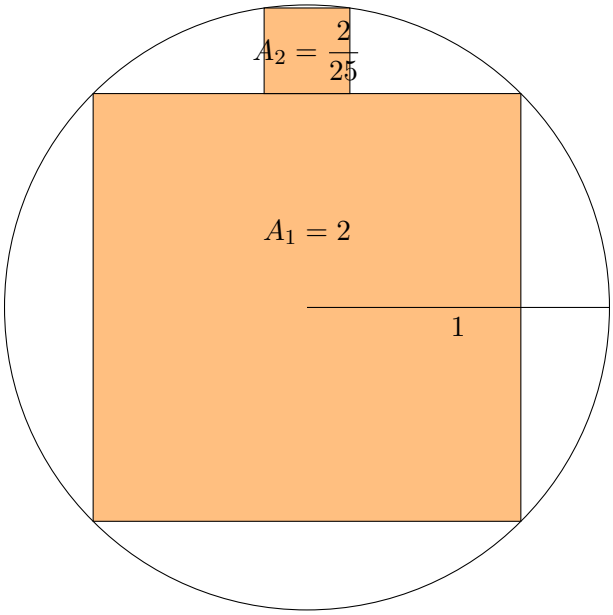


FIGURE 6 – Position de A_g

Il est clair, par invariance de la figure par rotation de quarts de tours, que chercher l'aire maximale d'un autre tampon dans les quatre parties du disque privé du carré en son centre, c'est chercher l'aire maximale d'un tampon dans la partie supérieure, et c'est cela que nous allons faire.

Dans ce cas, il est aussi clair que le tampon ne pourra qu'être centré horizontalement, sans quoi un simple déplacement permettrait un agrandissement.

On a également montré qu'il touchait nécessairement la frontière du cercle.

Soient $M_1(-x\,;\sqrt{1-x^2})$, $M_2(x\,;\sqrt{1-x^2})$, $M_3\left(x\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ et $M_4\left(-x\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. En vertu de ce qui précède, le tampon d'aire maximale est le rectangle $M_1M_2M_3M_4$ et doit être un carré.

On a donc $M_1M_2 = M_2M_3$,

$$\begin{aligned}
&\text{donc} \quad 2x = \sqrt{1-x^2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&\text{donc} \quad 2x + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{1-x^2} \\
&\text{donc} \quad \left(2x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - x^2 \\
&\text{donc} \quad (2x)^2 + 2 \times 2x \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - x^2 \\
&\text{donc} \quad 4x^2 + (2\sqrt{2})x + \frac{1}{2} = 1 - x^2 \\
&\text{donc} \quad 5x^2 + (2\sqrt{2})x - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{de la forme } ax^2 + bx + c = 0
\end{aligned}$$

On a donc $\Delta = b^2 - 4ac = \left(2\sqrt{2}\right)^2 - 4 \times 5 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 18$.

Il suit donc $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2\sqrt{2} - 3\sqrt{2}}{10} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{-\sqrt{2} + \sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

Or $x > 0$ donc $x = \dfrac{\sqrt{2}}{10}$, donc $A_2 = (2x)^2 = \left(2\dfrac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = \dfrac{2}{25}$.

On a donc $\boxed{A_g = \dfrac{52}{25}}$. Pour généraliser à un disque de rayon r, on multiplie les longueurs par r et on obtient $A_g = \dfrac{52}{25}r^2$.

Déterminons A_{dis} Considérons un disque dans lequel sont contenus deux tampons $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$, qui ne se chevauchent pas et dont les côtés sont parallèles aux axes. Ainsi :

— Soit les tampons ont un côté horizontal commun ;

— soit les tampons ont un côté vertical commun ;

— soit les tampons ne se rencontrent qu'en un point ;

— soit les tampons sont disjoints.

Pour l'étude qui suit, qui cherche à maximiser la somme des aires des deux tampons, on pourra toujours ramener le deuxième cas au premier en pivotant la figure d'un quart de tour. Ainsi, nous ne considérerons que les cas 1, 3 et 4. Pour simplifier, nous raisonnerons sur un disque de rayon 1, mais on pourra revenir au cas général en multipliant toutes les longueurs par r. Nous considérerons que $\mathscr{T}_1$ est le tampon se situant au-dessus du tampon $\mathscr{T}_2$.

Dans le cas 4, cette somme ne peut pas être maximale. En effet, il est toujours possible d'augmenter la taille d'un tampon en laissant l'autre inchangée de sorte que leur somme soit supérieure.

À supposer que cette somme soit maximale, on se ramène donc au cas 1 ou 3. Nous pouvons donc partitionner le disque $\mathscr{D}$ en deux régions délimitées par la droite d d'équation $y = a$, où a désigne l'abscisse des points de $\mathscr{T}_1 \cap \mathscr{T}_2$. Désignons par $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les régions telles que $\mathscr{T}_1 \subset \mathscr{D}_1$ et $\mathscr{T}_2 \subset \mathscr{D}_2$. Maximiser la somme $\mathscr{A}_1 + \mathscr{A}_2$, c'est donc maximiser l'aire de chacun des tampons.

On cherche donc à maximiser l'aire d'un carré contenu dans une intersection d'aire non nulle d'un disque et d'un demi-plan.

Par maximalité, il est nécessaire que chacun des tampons soit centré horizontalement et en contact avec le cercle et la droite d. Soient M_1 l'intersection d'abscisse positive de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{D}$ et M_2 l'intersection d'abscisse positive de $\mathscr{T}_2$ et $\mathscr{D}$. Soient $M_1(x_1\,;y_1)$ et $M_2(x_2\,;y_2)$. On a $x_1^2 + y_1^2 = 1$ donc $y_1^2 = 1 - x_1^2$, donc $y_1 = \sqrt{1 - x_1^2}$ car $y_1 \geqslant 0$. De même, $y_2 = -\sqrt{1 - x_2^2}$. On a donc :

$$M_1\left(x_1\,;\sqrt{1 - x_1^2}\right) \qquad \text{et} \qquad M_2\left(x_2\,;-\sqrt{1 - x_2^2}\right)$$

Soient :

$$M_1'\left(-x_1\,;\sqrt{1 - x_1^2}\right) \qquad \text{et} \qquad M_2'\left(-x_2\,;-\sqrt{1 - x_2^2}\right)$$

Soient H_1, H_1', H_2, H_2' les projetés orthogonaux respectifs de M_1, M_1', M_2, M_2' sur d. On a donc :

$$H_1(x_1\,;a) \quad ; \quad H_1'(-x_1\,;a) \quad ; \quad H_2(x_2\,;a) \quad ; \quad H_2'(x_2\,;a)$$

Ainsi, $M_1M_1'H_1'H_1$ est le tampon $\mathscr{T}_1$ et $M_2M_2'H_2'H_2$ est le tampon $\mathscr{T}_2$. Or ce sont des carrés, donc :

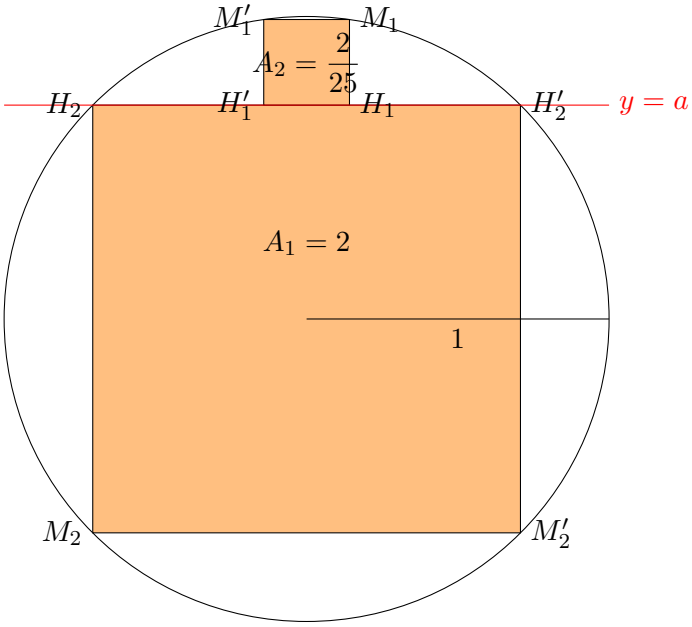


FIGURE 7 – Position de A_{dis}

$$\begin{aligned} M_1M_1' = M_1H_1 \quad &\text{donc} \quad 2x_1 = \sqrt{1-x_1^2} - a \\ &\text{donc} \quad 2x_1 + a = \sqrt{1-x_1^2} \\ &\text{donc} \quad (2x_1+a)^2 = 1 - x_1^2 \\ &\text{donc} \quad 4x_1^2 + 4ax_1 + a^2 = 1 - x_1^2 \\ &\text{donc} \quad 5x_1^2 + 4ax_1 + (a^2-1) = 0 \end{aligned}$$

On a donc $\Delta = (4a)^2 - 4 \times 5 \times (a^2-1) = 16a^2 - 20a^2 + 20 = 20 - 4a^2$. On a donc :

$$x_1 = \frac{-4a - \sqrt{20-4a^2}}{10} \quad \text{ou} \quad x_1 = \frac{-4a + \sqrt{20-4a^2}}{10}$$

Or $\dfrac{-4a - \sqrt{20-4a^2}}{10} < 0$ et $x_1 > 0$ donc $x_1 = \dfrac{-4a + \sqrt{20-4a^2}}{10}$.

De la même manière, $x_2 = \dfrac{-4a - \sqrt{20-4a^2}}{10}$.

Ainsi, en fonction de a, l'aire totale $\mathscr{A}(a)$ de $\mathscr{T}_1$ et $\mathscr{T}_2$ vaut :

$$\begin{aligned} \mathscr{A}(a) &= (2x_1)^2 + (2x_2)^2 \\ &= \left(2 \times \frac{-4a - \sqrt{20-4a^2}}{10}\right)^2 + \left(2 \times \frac{-4a + \sqrt{20-4a^2}}{10}\right)^2 \\ &= \frac{16a^2 + 8a\sqrt{20-4a^2} + 20 - 4a^2}{25} + \frac{16a^2 - 8a\sqrt{20-4a^2} + 20 - 4a^2}{25} \\ &= \frac{24a^2 + 40}{25} \\ &= \frac{24}{25}a^2 + \frac{8}{5} \end{aligned}$$

La fonction $\mathscr{A}$ est dérivable sur $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$, et pour tout $a \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}\,;\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$:

$$\mathscr{A}(a) = \frac{48}{5}a$$

a	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$
Signe de $\mathscr{A}'(a)$		$-$	0	$+$	
Variations de $\mathscr{A}$	$\frac{52}{25}$	↘	$\frac{8}{5}$	↗	$\frac{52}{25}$

FIGURE 8 – Étude de la fonction $\mathscr{A}$

L'aire maximale des deux tampons est donc $\frac{52}{25}$. En multipliant les longueurs par r, on obtient bien :

$$\boxed{A_{dis} = A_g = \frac{52}{25}r^2}$$

Proposition 4. *Dans un ensemble de configurations de deux tampons tel que dans la somme d'un côté du premier et d'un côté du deuxième soit fixée, la configuration d'aire maximale maximise l'aire d'un tampon, minimisant l'aire de l'autre.*

Démonstration. Soit x la longueur du premier tampon. On note l la somme d'un côté du premier tampon et d'un côté du deuxième, fixée. En fonction de x, on a donc $\mathscr{A}(x) = x^2+(l-x)^2 = 2x^2-2lx+l^2$. Cette fonction étant convexe, elle est maximale aux bornes de son ensemble de définition, c'est-à-dire dans le cas où x est maximal ou minimal, ce qui achève la démonstration. □

Cela s'applique à plusieurs cas énoncés, donc le cas du disque et du rectangle.

Dans le cas du triangle isocèle rectangle, on remarque aisément que $A_g = \frac{5a^2}{16}$. En effet, une fois le tampon d'aire maximale posé, il reste deux triangles semblables, de proportions moitié moindres. On en choisit un, et on a $A_g = \frac{a^2}{4} + \frac{(a/2)^2}{4} = \frac{5a^2}{16}$.

En coinçant un tampon dans un coin et en mettant l'autre tampon dans l'espace disponible, et en faisant varier la taille des tampons, la somme de leurs longueurs est fixée, donc $A_{dis} = A_g$.