

Rapport de l'équipe $\mathbb{KRD}$

$\mathbb{K}$arré d'or

Problème 2 : La montagne aux ruisseaux

Résumé

Nous cherchons à comprendre les orientations permettant k permutations des hauteurs des villages au travers de différents cas concrets. Nous avons exploré les cas $k = 0$ qui correspond à compter les orientations comportant un cycle. Nous interprétons le cas $k = 1$ comme celui des chemins qui passent une et une seule fois par chaque point du plan. Nous résolvons finalement le problème pour tout k dans des graphes particuliers. Nous avons ainsi résolu complètement les questions 1, 4, 5, 6.a et 6.b mais seulement partiellement la question 2 et pas du tout la 6.c.

Table des matières

1 Deux principes **2**
1.1 Nombre de ruisseaux 2
1.2 Parité de $n_k(P)$ 2

2 Des orientations paradoxales, le cas $n_0(P)$ **2**

3 Des arrangements uniques, le cas $n_1(P)$ **3**
3.1 Lemme de l'amont 3
3.2 Algorithme de l'amont 4
3.3 C_v 4
3.4 Q_v 6
3.5 Valeurs possible de $n_1(P)$ 6

4 $n_k(P)$ **7**
4.1 K_v 7
4.2 E_v 7

1 Deux principes

1.1 Nombre de ruisseaux

On s'intéresse à la question 1.

Un ruisseau relie deux villages A et B : soit il coule de A vers B soit de B vers A. Ainsi il y a deux orientations possibles pour chaque ruisseau. Pour r ruisseaux il y a 2^r orientations des ruisseaux (on multiplie par 2 pour chaque ruisseau).

1.2 Parité de $n_k(P)$

On s'intéresse aux valeurs de $n_k(P)$,

Théorème 1. *Le nombre $n_k(P)$ est pair sauf dans le cas $k = v!$ avec aucun ruisseau, auquel cas on a $n_k(P) = 1$.*

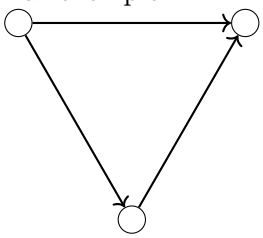
Démonstration. On note encore r le nombre de ruisseaux. Si $r = 0$, il n'y a pas de ruisseau. On note un tel plan V_v. On a $v!$ arrangements au total et tous fonctionnent pour la seule orientation qui existe. Ainsi $n_k(V_v) = 1$ si $k = v!$ et $n_k(V_v) = 0$ sinon.

On suppose maintenant $r \geq 1$.

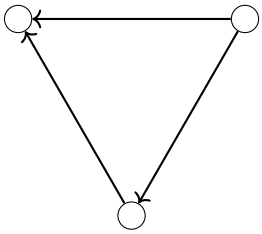
Soit une orientation $\mathscr{O}$ telle qu'il y ait exactement k manières d'attribuer les hauteurs aux villages.

Définition 2. *On appelle dual de $\mathscr{O}$ l'orientation $D(\mathscr{O})$ où tout les sens des ruisseaux sont inversés.*

Par exemple :



$\mathscr{O}$



$D(\mathscr{O})$

Ainsi $D(D(\mathscr{O})) = \mathscr{O}$. Par symétrie il y a donc exactement autant de manières d'attribuer les hauteurs aux villages avec $\mathscr{O}$ qu'avec $D(\mathscr{O})$. On les obtient en remplaçant les diverses hauteurs h choisies pour $\mathscr{O}$ par $v + 1 - h$: la compatibilité avec une orientation de ruisseau dans $\mathscr{O}$ est alors équivalente à celle dans $D(\mathscr{O})$.

Remarquons que le dual d'une orientation est différent de celle-ci si et seulement si il y a au moins un ruisseau.

Donc pour chaque orientation on a un dual avec le même nombre de manières d'attribuer les hauteurs. Et comme le dual du dual est l'orientation de départ, on a une correspondance deux par deux des orientations, chacune ayant le même nombre de manières d'attribuer les hauteurs. Donc il y a un nombre pair d'orientations et $n_k(P)$ est pair pour tout k dans $\mathbb{N}$.

□

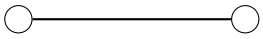
2 Des orientations paradoxales, le cas $n_0(P)$

On traite les questions 2 et 3 pour k petit.

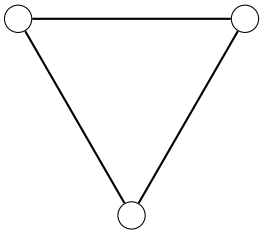
D'après le théorème 1, pour la question 2.b, aucun plan n'existe tel que $n_0(P) = 1$

On notera A_i les différents villages et $A_i > A_j$ si un ruisseau coule de A_i vers A_j, nécessitant ainsi que la hauteur de A_i soit supérieure à celle de A_j. Pour qu'il y ait des orientations qui

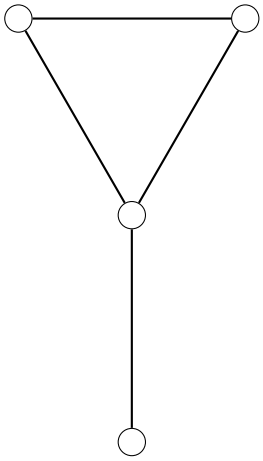
rendent un plan impossible il faut trouver dans le plan des villages tels que $A_0 > A_1 > A_2 > .... > A_n > A_0$, donc un cycle. Présentons maintenant des plans tel que $n_0(P)$ aient les valeurs $0, 2, 4$.



$n_0(P) = 0$



$n_0(P) = 2$



$n_0(P) = 4$

Pour la valeur 0 tout les arbres marchent car ils n'ont aucun cycle.

Pour la valeur 2 tout les cycles de longueur $n \geq 3$ marchent car ils ont deux orientations cycliques.

Pour la valeur 4 tout les cycles de longueur $n \geq 3$ avec une branche marchent car ils ont deux orientations cycliques avec une orientation du noeud de la branche vers le cycle et deux autres avec une orientation du cycle vers le noeud de la branche.

Pour toutes les solutions précédentes nos solutions sont très probablement exhaustives mais nous n'avons pas de preuves. Et $n_0(P) = 6$ nous semble impossible.

3 Des arrangements uniques, le cas $n_1(P)$

On s'intéresse aux questions 4 et 5.

3.1 Lemme de l'amont

Lemme 3. *Pour qu'une orientation n'ait qu'un seul arrangement il faut qu'il y ait un et un seul village en amont, c'est-à-dire tel que tout les ruisseaux qui y passent en partent.*

Démonstration. On prouve par l'absurde qu'il y a un village en amont.

Supposons qu'il y ait une orientation avec un seul arrangement possible et qu'il n'y ait aucun village en amont, c'est à dire que tout village ait un ruisseau qui y arrive. Maintenant remontons

cette chaîne de ruisseaux : à chaque village on choisit un ruisseau qui y arrive (ce qui est toujours possible par notre supposition) et le village dont ce ruisseau part sera notre nouveau village. On répète l'opération jusqu'à retomber sur un village dans lequel on est déjà passé (cela arrive forcément car il y a un nombre fini de villages). Puisqu'on a trouvé un chemin de remontées de ruisseaux qui va d'un village à lui-même, en prenant ce chemin à l'envers on suit le sens des ruisseaux et on a un cycle. Il n'y a donc aucun arrangement possible, ce qui entre en contradiction avec notre hypothèse de départ. On en conclut qu'il y a au moins un village en amont.

Maintenant supposons qu'il y ait une orientation avec au moins un arrangement possible et au moins deux villages en amont, c'est-à-dire source de tous leurs ruisseaux. Alors partant d'une configuration valide avec les deux plus grandes hauteurs attribuées à ces villages (ce qui est possible si au moins une configuration est possible) on pourrait permuter les hauteurs de ces deux villages entre eux et la configuration serait toujours valide. On aurait alors plus d'un arrangement valide. Par conséquent il y a au maximum un village en amont.

Donc on a un et un seul village en amont si $n_1(P) = 1$ □

Corollaire 4. *Pour qu'une orientation n'ait qu'un seul arrangement, il faut que P soit connexe, c'est-à-dire que pour tous villages a et b il existe au moins une succession de ruisseaux qui amène de a à b.*

Démonstration. Si le graphe n'est pas connexe et qu'il n'y a qu'un village en amont il est dans une partie du graphe. Si on prend une autre partie du graphe non reliée elle n'a pas d'amont et comme on a expliqué plus tôt cela signifie qu'elle contient un cycle de ruisseaux et donc qu'il n'y a aucun arrangement qui marche. □

3.2 Algorithme de l'amont

On utilise cette propriété de manière récursive pour définir une procédure qui calcule $n_1(P)$ pour P connexe.

On remarque que s'il y a un amont dans le plan P on doit lui attribuer la plus grande hauteur à notre disposition. On peut ensuite considérer un plan P_{v_1} sans le village en amont. Pour qu'il n'y ait qu'un seul arrangement pour l'orientation en question dans P :

1. Il faut que le plan P_{v_1} ait au moins un arrangement possible car sinon aucun arrangement ne serait possible dans P.
2. Il faut que le plan P_{v_1} n'ait qu'un seul arrangement possible car tout arrangement de P_{v_1} auquel on rajoute la plus grande hauteur sur l'amont P fournit un arrangement acceptable pour P.

Autrement dit il faut qu'il ait un et un seul arrangement dans P_{v_1}. Cela signifie par le lemme de l'amont que P_{v_1} possède un amont, et même mieux que cet amont est relié par un ruisseau à l'amont de P car sinon cet amont aurait déjà été un amont dans P.

On note $P = P_{v_0}$ et on construit une succession de plans P_{v_n}. Pour trouver toutes les orientations possibles, et les compter, on choisit un village en amont dans le plan P_{v_n}, on le retire et on réitère les mêmes opérations dans le plan suivant $P_{v_{n+1}}$, jusqu'à arriver à un plan n'ayant qu'un seul village. On remonte ensuite l'arbre de décision jusqu'au dernier choix effectué et on fait un autre, si possible. En comptant le nombre fois où on arrive au bout (un seul village) on obtient $n_1(P)$. En effet comme P est connexe, à chaque suite de choix on peut faire correspondre une orientation.

3.3 C_v

Appliquons cet algorithme aux plans cycles. Soit C_v un plan cycle de v villages avec $v \geq 3$ On a au début v possibilités pour l'amont.

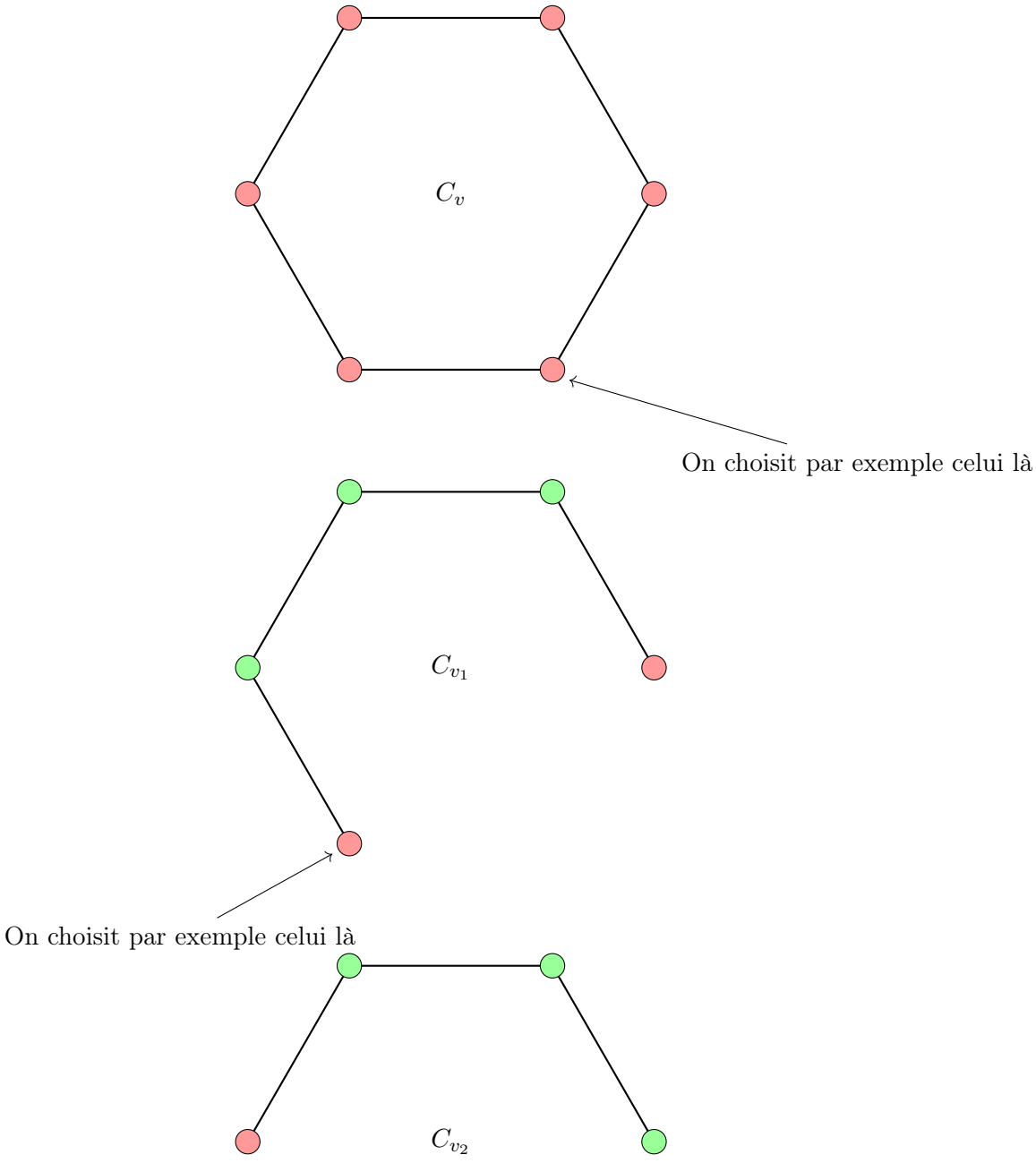
Puis dans le plan sans l'amont, C_{v_1}, on a deux choix : les points à coté de l'amont car si un autre point était un amont il l'aurait déjà été dans le plan C_v.

Ensuite dans le plan C_{v_2} après la suppression du second amont on a plus qu'un seul amont possible, celui qui était connecté au dernier amont enlevé.

Puis dans tout les plans $C_{v_n}, n \geq 2$ on à toujours une seule possibilité pour l'amont.

Un exemple de cette procédure :

amont possible amont impossible



On a donc v possibilités suivi, puis deux possibilités une fois l'amont déterminé. La chaîne d'amont détermine uniquement une orientation et donc on a $n_1(C_v) = 2v$ si $v \geq 3$.

Comme on a $n_1(C_1) = 1$ et $n_1(C_2) = 2$, on en conclut $n_1(C_v) = 2v$ si $v \geq 3$ et $n_1(C_v) = v$ si $v \leq 2$.

3.4 Q_v

On va commencer par noter $f(n)$ le nombre de chemins possibles qui partent du coin en bas à gauche de Q_{2n} et passant une et une seule fois par tout les points (cela nous servira pour compter).

1. Soit on commence par aller à droite et à ce moment là on ne pourra plus aller en haut car cela séparerait en deux l'espace des villages non visités et donc on ne pourrait plus tous les visiter sans passer deux fois par le même village. Dans ce cas là on continue à droite jusqu'au bout puis on monte et on continue par le seul chemin restant, c'est à dire tout le temps à gauche jusqu'au dernier village non visité.
2. Soit on commence par aller en haut, puis on doit aller à droite pour ne pas repasser par un village déjà visité et on a une situation analogue à celle pour le calcul de $f(n-1)$ (avec un coin en haut à gauche).

On a donc $f(n) = f(n-1) + 1$. Et comme dans Q_2 on a un seul chemin, donc $f(1) = 1$, il vient $f(n) = n$

Appliquons l'algorithme à Q_{2v} pour $v \geq 2$. Si on choisit en premier comme amont un coin du bas on aura ensuite $f(v)$ choix. Si on choisit le k^{e} élément du bas en partant de la droite, on ne peut pas choisir comme amont suivant celui qui est juste au-dessus, car cela découperait notre espace en deux et comme il doit être connexe, c'est impossible. Donc on à donc deux choix : soit vers la droite, ce qui nous oblige ensuite à aller tout à droite, soit vers la gauche, ce qui nous oblige ensuite à aller tout à gauche, pour ne pas couper en deux notre graphe. Les choix sont ensuite uniques : on remonte et on revient juste au-dessus de notre point de départ. Enfin on a $f(k-1)$ choix si on est parti vers la droite ou $f(v-k-1)$ si on est parti vers la gauche au départ.

On a pris seulement les points du bas donc pour englober ceux du haut on multiplie le décompte par 2 et on a donc au total $2(2f(v) + \sum_{k=2}^{k=v-1} f(k-1) + f(v-k-1))$

$$n_1(Q_v) = 2(2f(v) + \sum_{k=2}^{v-1} (f(k-1) + f(v-k-1))) \tag{1}$$

$$n_1(Q_v) = 2(2v + \sum_{k=2}^{v-1} (v-2)) \tag{2}$$

$$n_1(Q_v) = 2(2v + (v-2)(v-2)) \tag{3}$$

$$n_1(Q_v) = 2v^2 - 4v + 8 \tag{4}$$

$$n_1(Q_v) = 2(v-1)^2 + 6 \tag{5}$$

3.5 Valeurs possible de $n_1(P)$

On a par le théorème 1 que $n_1(P)$ est soit pair soit égal à 1. On peut effectivement atteindre toutes les valeurs paires sauf 0 grâce aux plans cycles ($n_1(C_v)$=$2v$ si $v \geq 2$) On peut atteindre 1 grâce à C_1. On a dit dans la section du théorème de la parité n_k que pour V_v (plan sans ruisseau de v villages) il y a $v!$ arrangements qui fonctionnent pour la seule orientation et donc $n_k(V_v) = 1$ si $k = v!$ et $n_k(V_v) = 0$ si $k \neq v!$. donc on atteint 0 grâce à V_2.

Donc $\forall n \in 2\mathbb{N} \cup \{1\}$ $\exists P$ tel que $n_1(P) = k$. Avec $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs.

4 $n_k(P)$

4.1 K_v

Pour étudier K_v on étudiera les arrangements plutôt que les orientations. Ainsi à chaque arrangement des hauteurs on peut associer un orientation unique, car comme tout les villages sont reliés, l'inversion de deux hauteurs change l'orientation du ruisseau qui les relie. Comme il y a $v!$ arrangements et qu'à chaque arrangement correspond une et une seule orientation on a v ! orientations à un arrangement donc $n_1(K_v) = v!$ et $n_k(K_v) = 0$ si $k \neq 1$

4.2 E_v

Soit une orientation de E_v avec k ruisseaux qui arrivent au village du milieu, il y a donc $v-k-1$ ruisseaux qui en repartent. Cela impose pour cette orientation que le $k+1^{\text{e}}$ nombre en partant du plus haut soit au milieu puis on a le choix entre k permutations pour les k premiers en partant du haut et $v-k-1$ permutations pour les $v-k-1$ derniers car leurs seules relations sont celles avec le centre. Ce qui donne $k!(v-k-1)!$ permutations. Il y a $\binom{v-1}{k}$ orientations qui ont k ruisseaux qui arrivent au village du milieu et $\binom{v-1}{k}$ orientations qui ont k ruisseaux qui repartent du village du milieu, donc $n_{k!(v-k-1)!}(E_v) = 2\binom{v-1}{k}$ si $v \neq 2k+1$. Mais quand $v = 2k$ les orientations qui ont k ruisseaux qui arrivent sont les mêmes que celles qui ont k ruisseaux qui repartent, donc $n_{k!(v-k-1)!}(E_v) = \binom{v}{k}$ si $v = 2k+1$.