

Rapport de l'équipe $\mathbb{KRD}$

$\mathbb{K}$arré d'or

Problème 3 : Appoint monétaire

Résumé

Nous avons dans ce problème essayé de comprendre comment optimiser les cas au travers d'exemples. Le but de cet exercice est de connaître les valeurs d'argent que l'on peut faire en fonction de la manière dont nous est rendu une somme totale. Tout cela dépend aussi du système dans lequel on nous rend la monnaie. Nous avons répondu aux questions 1, 2 et 6 en totalité. Les questions 3, 4, 5 ont quant à elles été traitées en partie avec des conjectures. Pour la question 7, nous n'avons pas abordé le cas c). Les résultats trouvés aux premières questions nous ont permis d'émettre des conjectures par la suite et de guider nos démonstrations.

1 Résumé et présentation de la réflexion

Dans la première partie de l'exercice (question 1) le but est de savoir quelles valeurs composent l'ensemble $A_{\{1,3,10\}}(10^n)$. Pour tout l'exercice on maximisera dans toutes les décompositions le nombre de valeurs différentes de 1 car étant la valeur unité elle permet de réaliser tous les nombres.

Proposition 1.

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \ \exists k \in \mathbb{N} \ 10^n = 30k + 10$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on a :
$100 = 3\times30+10$ donc $100 \equiv 10 \pmod{30}$, donc $\forall n \in \mathbb{N}^* \ 10^{n+1} = 100\times10^{n-1} \equiv 10\times10^{n-1} = 10^n \pmod{30}$ et donc, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}^* \ 10^n \equiv 10 \pmod{30}$.

□

Proposition 2. *Tout multiple de 10 est congru à 0, 10 ou 20 modulo 30.*

Démonstration. Comme tout entier est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3, en multipliant par 10 on en déduit le résultat. □

Proposition 3. $\forall k \in \mathbb{N}^* \ 30 \in \mathscr{A}_{\{1,3,10\}}(30k)$ *et donc, par récurrence,*

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \qquad \{0, 30, 60, \ldots, 30k\} \in \mathscr{A}_{\{1,3,10\}}(30k) \ .$$

Démonstration. On suppose que l'on a au plus deux pièces de 1 car sinon on les regroupe en paquets de trois et on les traite comme des pièces de 3. Ainsi si on ne peut pas faire 30 alors on a au plus deux pièces de 10, neuf pièces de 3 et deux pièces de 1, soit au total 49 au maximum. Comme la somme totale est un multiple de 30, c'est que c'est 30 et on est sûr de pouvoir obtenir 30. La récurrence qui suit est immédiate. □

Proposition 4. *Soit x dans $\mathbb{N}^*$. Alors on a* $\forall n \in \mathbb{N}^* \ x \in \mathscr{A}_{\{1,3,10\}}(10^n) \implies x \not\equiv 2 \pmod{3}$.

Démonstration. On part du rendu avec une seule pièce de 10 et des pièces de 3. Modulo 3 ce sont donc des pièces de 1 et de 0 et donc en les recomposant on obtient 0 ou 1 selon qu'on a pris la pièce de 10 ou pas. Plus précisément : on décompose 10^n sous la forme :

$$\begin{aligned} 10^n &= 3 \times \underbrace{10k}_{=q' \in \mathbb{N}} + 1 \times 10 \\ &= 3q' + 10 \end{aligned}$$

Selon cette décomposition, on peut avoir notre argent (10^n) avec 1 pièce de 10 et q' pièces de 3, il y a deux cas possibles pour faire x :

- Soit on prend la pièce de 10
- Soit on ne la prend pas, et donc on fait x seulement avec des pièces de 3

Si l'on prend la pièce de 10 :
Soit r le reste à faire en pièce de 3, avec $r \in \mathbb{N}$. On a :
$r = 30k + 20 - 10 = 30k + 10$

$$\begin{aligned} r &= 3\underbrace{(10k + 3)}_{=k' \in \mathbb{N}} + 1 \\ &= 3k' + 1 \end{aligned}$$

$3k' + 1$ n'étant pas un multiple de 3 on ne peut pas réaliser r en pièces de 3 et donc compléter la pièce de 10 pour avoir x.

Si l'on prend ne prend pas la pièce de 10 : Soit r' le reste à faire en pièce de 3, avec $r' \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} r' &= 3\underbrace{(10k+6)}_{=k'' \in \mathbb{N}} + 2 \\ &= 3k'' + 2 \end{aligned}$$

$3k'' + 2$ n'étant pas un multiple de 3 on ne peut pas faire la valeur x que avec des pièces de 3.

Dans les 2 cas on ne donc peut pas réaliser x, on en déduit que tous les $30k + 20$ ne sont pas faisable □

Proposition 5. $\forall n \in \mathbb{N}^*\ 10 \in \mathscr{A}_{1,3,10}(10^n)$.

Démonstration. Soit on a une pièce de 10, soit on a que des pièces de 3 et au moins une pièce de 1, dans tous les cas on est assuré d'obtenir 10. □

On en conclut

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \mathscr{A}_{1,3,10}(10^n) = \{0, 10, 30, 40, \ldots, 10^n - 10, 10^n\}\ .$$

En effet, comme on est sûr d'obtenir 10, on est aussi certain d'obtenir le multiple de 30 qu'est $10^n - 10$. D'après le premier lemme, on est assuré de tous les autres multiples de 30 inférieurs avec la monnaie sur $10^n - 10$. Quitte à rajouter les premiers 10, on obtient donc les nombres de la forme $30k$ ou $30k + 10$. Enfin comme on peut n'avoir que des pièces de 10, on ne considère que les multiples de 10.

2 Question 2 :

On peut déjà remarquer que $S \subset P_S$, car, si $x \in S$, on peut rendre l'argent avec une pièce de valeur x, dans ce cas on n'a pas l'appoint pour n'importe quelle autre valeur, donc $x \in P_S$. De plus dans la suite on prend un minimum de pièces de 1 car elle permettent de faire toutes les valeurs.

Si $S = \{1, u\}$:

- Si $x \in]\!]1; u[\!]$, alors on a forcément que des pièces de 1 et donc l'appoint pour 1.
- Si $x \in]\!]u; \infty[\!]$, alors on a forcément au moins une pièce de valeur u ou au moins u pièces de valeur 1, et donc l'appoint pour u.

Donc $P_S = \{1; u\}$

Si $S = 2\mathbb{N} + 1$: soit x pair.

- Si $x > 4$, alors il existe au moins deux décompositions différentes, $x = (x-1) + 1$ et $x = (x-3) + 3$ donc $x \in P_S$
- Si $x = 4$, alors les deux seules décompositions sont $4 = 3 + 1$ ou $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, donc on a forcément l'appoint pour 3.
- Si $x = 2$, alors la seule décomposition est $2 = 1 + 1$, donc on a forcément l'appoint pour 1.

Donc $P_S = \mathbb{N} \setminus \{0, 2, 4\}$

Si $S = \{2^n, n \in \mathbb{N}\}$:

- Si $x \in 2\mathbb{N}+1$, alors on a forcément l'appoint pour 1, car l'addition de nombres pairs donnent un nouveau nombre pair.
- Si $x \in 2\mathbb{N}$, alors on a x qui s'écrit en base 2 sous la forme $x = 2^a + 2^b + \cdots + 2^n$ avec $a < b < \cdots < n$ (cette écriture est unique), alors on a l'appoint pour 2^a. En effet soit on a une pièce de 2^a, soit on étudie les pièces modulo 2^{a+1}. La somme des pièces de valeurs inférieures à 2^a est donc congrue à 2^a modulo 2^{a+1}. Et quitte à remplacer deux pièces de valeur 2^k par une pièce de valeur 2^{k+1}, on peut supposer avoir au plus une pièce de chaque type ainsi que des pièces de valeur 2^a. Comme la somme de pièces de valeurs 1, 2, ..., 2^{a-1} est comprise entre 0 et $2^a - 1$, on doit donc avoir obtenu au moins une pièce de valeur 2^a.

Donc $P_S = S$

Si $S = \{1, u, v\}$, avec $2 \leqslant u < v$, on note $A = \{qv + ku, (q,k) \in \mathbb{N}^2\}$.

- Si $x \notin A$ alors on a l'appoint pour 1, ce qui est le cas si x n'est pas multiple du pgcd de u et v. Soit $PGCD(u;v) = d$, dans la suite on s'intéresse au cas où d divise x. On a donc $u = du'$ et $v = dv'$ avec u' et v' premiers entre eux et un nombre de pièces de 1 multiple de d
- Si $x = qv + ku$ et $q \geqslant u$ alors on a l'appoint pour $u \times v$
- Si $x = qv + ku$, on peut l'écrire avec $0 \leqslant k < v$ (théorème de Bézout). Si on ne nous rend pas de pièces de 1 et que $q \leqslant u$, soit on a au moins u pièces de v, soit v pièces de u, dans ce cas on a toujours l'appoint pour uv. Donc si $x > (u-1)v+(v-1)u$, soit $x \geqslant 2uv-u-v+1$. alors si on prend des pièces de valeurs u et v, on a l'appoint pour uv.

  On peut considérer que u pièces de 1 revient à une pièce de valeur u, ainsi les différents cas à étudier sont les rendus pour des valeurs de $x, x-1, \ldots, x-u+1$. On en déduit que si ces valeurs sont supérieures à $2uv - u - v + 1$ alors on a l'appoint pour uv. Cela peut être résumé en $x - u + 1 \geqslant 2uv - u - v + 1$, soit $x \geqslant 2uv - v$, alors on a l'appoint pour uv est donc x n'appartient pas à P_S. P_S est donc finit.

Si S est égale aux nombres premiers : en admettant la conjecture de Goldbach, tout nombre pair peut s'écrire comme somme de deux nombres premiers impairs, donc $2n = p + q$, ce qui montre que $2n$ n'est pas primaire.

3 Question 3 :

- Si S est infini alors P_S est également infini
- Si S est fini alors P_S est fini car le cas $S_{1,u,v}$ étudié précédemment nous montre qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres primaires car ils sont tous strictement inférieurs à $2uv - v$. Cette réflexion peut s'étendre à tous les ensembles S avec un nombre $n \in \mathbb{N}^*$ de valeurs car on peut regrouper les $n-1$ valeurs et donc revenir sur l'exemple précédent. Par exemple, prenons le système $S = \{1, u, v, w\}$ et considérons le système $S = \{u \times v, w\}$, on sait que dans ce dernier si $x \geqslant 2(u \times v)w - w$ alors x n'est pas primaire car on a l'appoint pour $(u \times v)w$. Dans le système $S = \{1, u, v, w\}$ il semble donc qu'on n'aura pas de nombres primaires au dessus de $2(u \times v)w - w$.

4 Question 4 :

On a au moins $\max(S) \leqslant \max(P_S)$. Mais on peut conjecturer avec les résultats précédents qu'un système S comprenant n éléments $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ n'aura aucun nombre primaire supérieur à $2(\prod_{i=1}^{n-1} a_i) \times a_n + a_n$. On aurait donc $max(S) \leqslant max(P_S) < 2(\prod_{i=1}^{n-1} a_i) \times a_n + a_n$

5 Question 5 :

- Si S est fini et comprend $n \in \mathbb{N}$ éléments premiers entre eux $(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ alors il faut que $\prod_{i=1}^{n} a_i \in P_S$, car cette valeur est primaire comme conjecturé auparavant.
- De plus, pour qu'un nombre ne soit pas primaire, il ne faut pas qu'il puisse s'écrire $x = u+v$ et $x = w + y$ avec u, v, w, y dans S. De ce fait il ne faut pas que $w - u = y - v$ pour tout quadruplet de nombres (u, v, w, y) de S.

6 Question 6 :

Les systèmes $S = \{1; u\}$, $S = \mathbb{N}^*$, $S = 2\mathbb{N} + 1$ admettent une S-décomposition pour chaque prix.

a) Car si $S = \{1; u\}$, on écrit $x = ku + r$ avec $(k, r) \in \mathbb{N}^2$ et k maximal alors une S-décomposition est composée de k pièces de u et de r de 1.

b) Si $S = \mathbb{N}^*$, alors une S-décomposition de x est (x).

c) Si $S = 2\mathbb{N}+1$, alors si $x \in S$ même réflexion que précédemment et sinon une S-décomposition de x est $(x - 1, 1)$.

d) Cependant il semble que dès lors que $S = \{1, u, v\}$, tout prix n'admette pas de S-décomposition. Par exemple avec $S = \{1; 2; 3\}$, on a $4 = 3 + 1$ ou $4 = 2 + 2$ ou $4 = 1 + 1 + 1 + 1$, or aucune de ces décompositions n'est une S-décomposition car 2 et 3 ne sont pas S-appoint de 4.

7 Question 7 :

a) Le système $S = \{1; u\}$ $\forall u > 2$ convient car $\forall x = ku + r$ avec $(k, r) \in \mathbb{N}^2$, il n'existe qu'une seule S-décomposition car dès l'instant que l'on n'a pas k pièces de u dans la S-décomposition, on aura au moins $r + 1$ pièces de valeur 1 et $r + 1$ n'est pas un S-appoint sauf si $S = \{1; 2\}$.

b) Le système $S = \mathbb{N}^*$ convient car $\forall x \in \mathbb{N}^*$. La S-décomposition de x peut être (x), de ce fait pour n'importe quelle autre S-décomposition, les termes ne seront pas S-appoint de x.

d) Le système $S = \{1; 2; 4\}$ convient car, on a $6 = 4 + 2$ ou $6 = 2 + 2 + 2$, on a bien 2 et 4 S-primaire car $2 \in S$ et $4 \in S$. De plus, on peut forcément faire la valeur 2 ou 4.