

Rapport de l'équipe KRD

Karré d'or

Problème 4 : Musique déformée

Résumé

Nous avons commencé par s'intéresser aux conditions suffisantes et nécéssaires aux transformations pour les questions 1 , 2 et 3 , avant de s'intéresser aux bandes son obtenables dans les questions 4 et 5, puis nous avons relié la structure des images à celle d'un enchaînement de bande son dans la question 6

Table des matières

1 Possibilité des transformations **2**
1.1 disparition d'une note . . . 2
1.2 les notes ne sont plus deux à deux distinctes . . . 2
1.3 un silence apparaît . . . 2
1.4 un silence disparaît . . . 3
1.5 Toutes les notes sont les même . . . 3
1.6 la bande son ne contient que des silences . . . 4

2 nombre d'étapes pour réaliser ces transformations **4**
2.1 disparition d'une note . . . 4
2.2 les notes ne sont plus deux à deux distinctes . . . 4
2.3 un silence apparaît . . . 4
2.4 un silence disparaît . . . 5
2.5 Toutes les notes sont les même . . . 5
2.6 la bande son ne contient que des silences . . . 5

3 Résolution minimum **5**
3.1 disparition d'une note . . . 5
3.2 les notes ne sont plus deux à deux distinctes . . . 5
3.3 apparition et disparition d'une note . . . 5
3.4 toutes les notes sont les même . . . 6
3.5 toutes les notes sont des silences . . . 6

4 Limitation a des bandes son impaires **6**
4.1 un silence apparaît . . . 6
4.2 changement de bande son de longueur 3 . . . 7
4.3 changement de bande son de longueur . . . 7

5 Pas de restrictions sur la parité **9**
5.1 . . . 9
5.2 . . . 9
5.3 nombre de notes distinctes possibles . . . 9
5.3.1 Création de silences . . . 9
5.3.2 n impair . . . 10
5.3.3 n pair . . . 10

6 image en deux dimensions **11**
6.0.1 rectangles non distincts 2 à 2 . . . 11
6.0.2 apparition d'un silence . . . 11
6.0.3 rectangles identiques . . . 12
6.1 modification de bandes son . . . 12

Dans cet exercice, on définit n et m les nombres de notes respectivement de la bande son d'origine et d'arrivée
On assimilera la bande son à un segment servant de repère d'une dimension avec les coordonnées des points inclus comprises dans l'intervalle$[0;1]$
On admettra, pour la kème note d'un bande son de longueur n :
-son centre de coordonnée $\frac{k-1/2}{n}$
-son extrémité droite de coordonnée $\frac{k}{n}$

1 Possibilité des transformations

1.1 disparition d'une note

Lorsque l'on diminue la résolution de la bande son, il y a forcément au moins une note qui disparaît

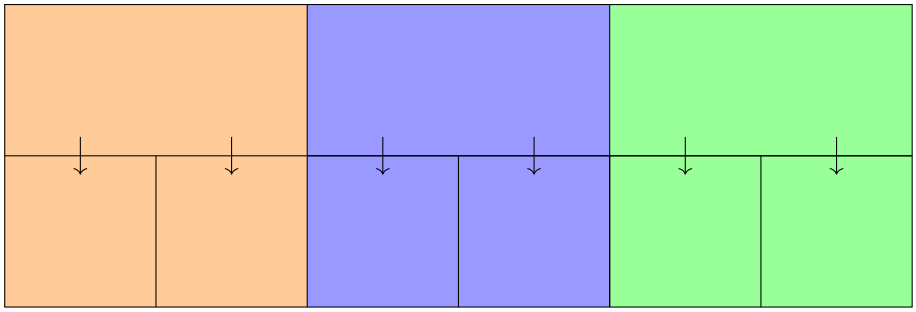
Démonstration. Pour $n > m$,il y a $n - m > 0$ notes qui disparaissent □

Il est donc possible de faire disparaître une note après un nombre fini d'opérations

1.2 les notes ne sont plus deux à deux distinctes

Lorsque l'on double la résolution de la bande son,les notes ne sont plus deux à deux distinctes

Démonstration. En doublant la résolution ,les nouvelles notes sont deux fois moins longues que celles d'origine 2 nouvelles notes font donc la longueur d'une note d'origine, et elles font le même son entre elles on obtient une bande son de ce style : □



Exemple pour $n = 3$ et $m = 6$

Il est donc possible de rendre les notes deux à deux identiques

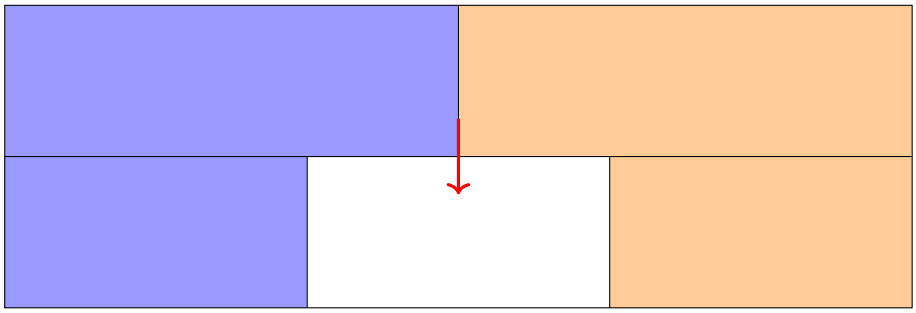
1.3 un silence apparaît

Lorsque n est pair et m est impair,un silence apparaît au centre de la bande son

Démonstration. Soient $n = 2y$ et $m = 2y + 1$, $(y, y') \in \mathbb{N}^2$ On sait que n notes de longueurs $1/n$ de la bande d'origine équivalent à m notes de longueur $1/m$ de la nouvelle bande$(n \cdot 1/n = m \cdot 1/m = 1)$.Ainsi :

$$2y \cdot 1/n = (2y' + 1)1/m \quad (1)$$
$$y \cdot 1/n = (y' + 1/2)1/m \quad (2)$$

On a donc $y' + 1/2$ notes de la nouvelle bande équivalant à y notes de la bande originale , ce qui signifie qu'un silence est créé pour l note $y' + 1$ □



Exemple pour $n = 2$ et $m = 3$

Il est donc possible qu'un silence apparaisse

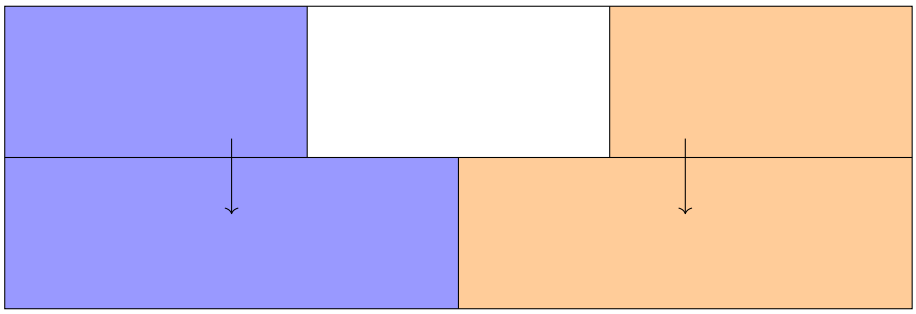
1.4 un silence disparaît

On a vu dans la question précédente qu'il est possible de faire apparaître un silence au centre d'une bande son de n'importe quel nombre pair de notes en changeant la résolution par un nombre impair de notes.

Ensuite si la bande son fait un nombre impair (différent de 1) de notes, il est possible de faire disparaître la note du centre n passant a une résolution avec un nombre inférieur et pair de notes

Démonstration. Soient $n = 2y + 1$, $m = 2y'$,avec $n > m$, et $(y, y') \in \mathbf{N}^2$ Le centre de la bande originale est en $1/2$, soit le centre de la note centrale de la bande son. Les notes faisant un longueur de $1/n$,
on déduit que la note s'étend sur : $]1/2 - 1/2n; 1/2 + 1/2n[$

Le centre de la nouvelle bande est en $1/2 = y' \cdot 1/m$, soit entre les deux notes centrales de la bande son. Les notes faisant un longueur de $1/m$, on déduit que les centres des deux notes centrales sont en $1/2 - 1/2m$ et $1/2 + 1/2m$ Or, comme $n > m$, $1/2n < 1/2m$
Ainsi $1/2 - 1/2m < 1/2 - 1/2n$ et $1/2 + 1/2m > 1/2 + 1/2n$
Les milieux des deux notes du centre n'appartiennent donc pas à l'intervalle ci-dessus, donc la note du centre de la bande son disparaît. □



Exemple pour $n = 3$ et $m = 2$

Il es donc possible de faire disparaître un silence après l'avoir fait apparaîtra au centre de la bande son

1.5 Toutes les notes sont les même

Lorsque l'on choisi $m = 1$, il n'y a qu'une seule note : ainsi toutes les notes sont les mêmes

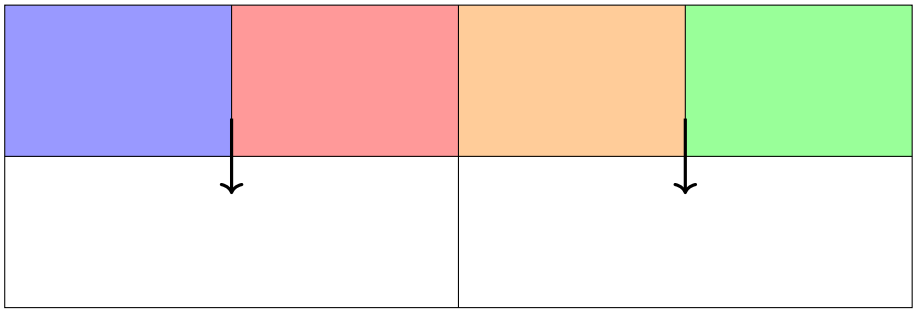
1.6 la bande son ne contient que des silences

Lorsque l'on choisi $m = n/2$,avec $n = 2y$,donc $m = y(y \in \mathbf{N})$,on obtient une bande son composée de silences uniquement

Démonstration. Soit k la k^{ème} note de la nouvelle bande son :
On a

$$\frac{2k-1}{2y} = \frac{k-1/2}{y} \tag{3}$$
$$\frac{2k-1}{n} = \frac{k-1/2}{m} \tag{4}$$
$$(2k-1)1/n = (k-1/2)1/m \tag{5}$$

Ainsi,$\forall k \in [\![0, m]\!]$, $(k-1/2)1/m = (2k-1)1/n$ Ce qui signifie que le milieu de chaque note de la nouvelle bande son correspond à l'intervalle entre les notes de la bande son originale □



Exemple pour $n = 4$ et $m = 2$

Il est donc possible d'obtenir une bande son composée uniquement de silences

2 nombre d'étapes pour réaliser ces transformations

2.1 disparition d'une note

Comme prouvé en 1.1, il est possible de faire disparaître un note en choisissant $n < m$ Ainsi, si $n \neq 1$, il suffit d'une étape, mais si $n = 1$, il en faut 2(il faut d'abord augmenter la résolution avant de la diminuer)

2.2 les notes ne sont plus deux à deux distinctes

Comme prouvé en 1.2,lorsque l'on double la résolution de la bande son,les notes ne sont plus deux à deux distinctes Ainsi,Pour tout n ,il est possible de doubler la résolution et donc que les notes ne soient plus distinctes en une opération

2.3 un silence apparaît

Soient des bandes son de résolutions n et m, Soient x et k le numéro des notes des bandes sont originales et nouvelles respectivement La présence d'un silence implique que :
$\exists (x, k) \in \mathbf{N}^2$,

$$x \cdot 1/n = (k-1/2)1/m \tag{6}$$
$$2x \cdot 1/n = (2k-1)1/m \tag{7}$$
$$2xm = (2k-1)n \tag{8}$$

$xm \in \mathbf{N}$ donc 2 divise $(2k-1)n$.
Or $PGCD(2, 2k-1) = 1$ Donc d'après le théorème de GAUSS, 2 divise n
Ainsi, afin de créer un silence, il est nécessaire que n soit pair. De plus, nous avons montré que c'était une condition suffisante dans le 1.3.
On en déduit qu'il est impossible de créer un silence à partir d'une résolution impaire,alors qu'il est toujours possible de créer un silence à partir d'une résolution paire.
On peut donc faire apparaître un silence en 1 étape lorsque n est pair et en 2 étapes lorsque il est impair(il faut d'abord passer par une résolution paire)

2.4 un silence disparaît

On a vu dans la question précédente qu'il est possible d'obtenir un silence sur une bande son de résolution impaire au choix en 1 étape si n est pair,et 2 étapes si n est impair. On a également vu qu'il est possible de faire disparaître ce silence en une étape en passant à une résolution paire inférieure à celle de la bande son comportant le silence. Suivant si n est pair ou impair, il faudra donc respectivement 2 ou 3 étapes pour parvenir à cette transformation.

2.5 Toutes les notes sont les même

Comme montré dans le 1.5, pour tout $n \in \mathbf{N}$,en prenant $m = 1$, toutes les notes sont les mêmes, ainsi il est possible de rendre toutes les notes pareil en une étape

2.6 la bande son ne contient que des silences

Comme prouvé ci-dessus, il est nécessaire d'avoir une bande son de résolution n paire , donc il est également nécessaire que n soit pair pour obtenir une bande son remplie de silences. Nous avons également vu dans le 1.5 que la parité de n est une condition suffisante. Donc si n est pair, il ne faut qu'une opération en choisissant $m = n/2$, et si n est impair, il faudra deux opérations :rendre la bande paire puis diviser la résolution par deux

3 Résolution minimum

On prendra k comme résolution minimum des bandes sons crées

3.1 disparition d'une note

On a vu que pour tout $m < n$, des notes disparaissent,donc si $k < n$,une seule opération suffit. Si k=n, il faudra remplacer une note par un silence en doublant la résolution et en la divisant par 2,ce qui va créer une bande son remplie de silences avec une résolution de $n \geq k$.Il faudra donc 2 opérations

3.2 les notes ne sont plus deux à deux distinctes

En prenant $m = 2n$, on a bien $m > n \geq k$, et la transformation est bien accomplie(voire 1.2) Il ne suffit donc que d'une seule opération

3.3 apparition et disparition d'une note

Comme on peut créer des silences en augmentant la résolution comme on veut,il n'y a aucune contrainte supplémentaire sur le nombre d'opérations pour faire apparaître et disparaître des silences, le nombre d'opérations minimales est donc le même(1 ou 2 , 2 ou 3)

3.4 toutes les notes sont les même

si k=1 on peut toujours effectuer la transformation comme précédemment en prenant m=1, donc en 1 opération, mais si $k > 1$, on ne peut plus utiliser cette stratégie. Pour que toute les notes soient les même, il faut donc toutes les transformer en silence.

3.5 toutes les notes sont des silences

Soit y la y-ème note de la nouvelle bande son de m notes et n le nombre de notes de la bande son originale.Pour obtenir une bande son remplie de silences, on a vu au 2.6, qu'il est nécessaire que n soit pair. De plus, au maximum, $m = n/2$

Démonstration. Pour que la bande son soit uniquement composée de silences, il faut que : $\forall y \in [\![1, m]\!]$, $(y - 1/2)1/m = x/n$,avec x la x-ème note de la bande originale(on a $x \in [\![1, n]\!]$) en prenant le cas de $y = 1$, on obtient :

$$1/2m = x/n \tag{9}$$
$$2m = n/x \tag{10}$$
$$m = n/2x \tag{11}$$

Comme au minimum,$x = 1$, on en déduit qu'au maximum $m = n/2$ On a également montré dans le 1.6 que cette valeur de m fonctionnait □

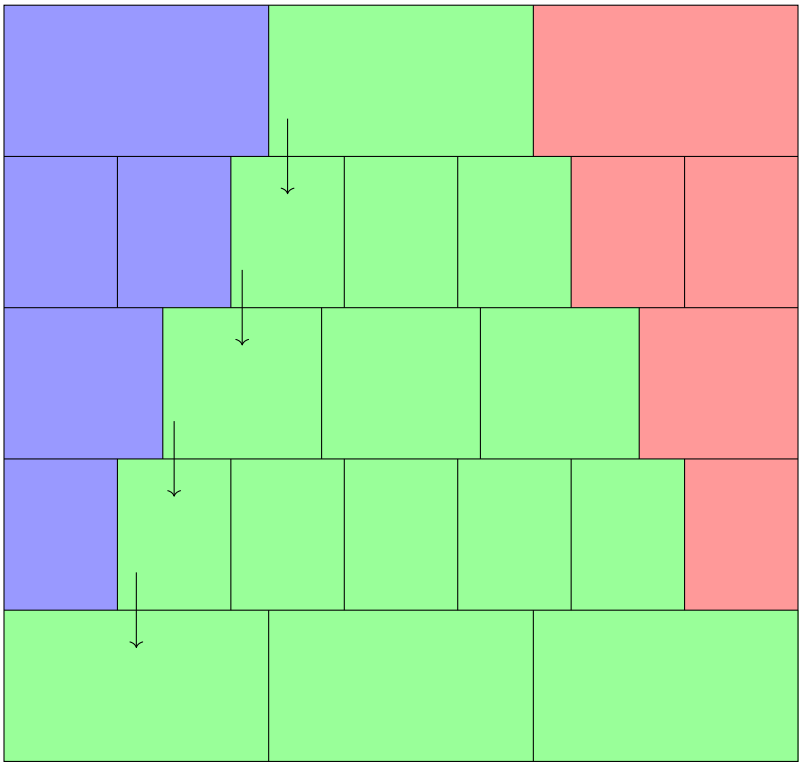
Ainsi,si n est pair et $k \leq n/2$,il suffira d'une étape. Sinon, il faudra 2 opérations

4 Limitation a des bandes son impaires

4.1 un silence apparaît

On a montré dans le 2.3 qu'il est nécessaire que n soit pair pour créer un silence, donc en se limitant à des bandes son de longueur impaire, c'est impossible de créer des silences.

4.2 changement de bande son de longueur 3



Voici une preuve qu'il est possible de partir d'une bande son de longueur 3 et de revenir à une bande son de longueur 3 différente sans passer par une longueur de 1.

4.3 changement de bande son de longueur

Lorsque l'on se limite à des bandes son de longueur impaire, on ne peut pas créer de silences , donc le nombre de notes sera toujours n pour une bande son de longueur n. De plus, on peut observer une symétrie autour de la note centrale donc le nombre de notes distinctes de chaque côté de la note centrale est le même. On obtient donc un nombre pair de notes distinctes autour de la note centrale, et donc un nombre impair en la comptant. Ainsi,à la fin la bande son ne peut contenir qu'un nombre impair de notes distinctes. On traitera les cas de $n = 1$ et $n = 3$ plus tard.

Pour $n \geq 5$, il est possible de supprimer les notes latérales en les remplaçant par leur note voisine en ajoutant 2 à la résolution jusqu'à une résolution de $2n+1$ et en la ramenant à n notes. On utilise la symétrie de la bande son en se penchant seulement sur son extrémité gauche.

Démonstration. On pose : Lorsque $n > 4$, en augmentant la résolution de 2, le nombre de notes

jouant le son des notes latérales reste égal à 1.

$$n > 4 \tag{12}$$
$$3n > 2n + 4 \tag{13}$$
$$n > 2\frac{n+2}{3} \tag{14}$$
$$\frac{1}{n} < \frac{3}{(n+2)2} \tag{15}$$
$$\frac{1}{n} < \frac{3/2}{(n+2)} \tag{16}$$
$$\frac{1}{n} < \frac{2-1/2}{(n+2)} \tag{17}$$
$$\tag{18}$$

Ainsi ,lorsque $n > 4$, le milieu de la 2ème note de la bande son de résolution $n+2$ est plus grand que le bord de la première note de la bande son de résolution n, donc il n'y aura que la première note de la nouvelle bande son qui sera semblable à la première note de la bande son d'origine. De plus, en passant de la résolution $2n+1$ à la résolution d'origine n,les notes latérales disparaissent. On prend :

$$2n < 2n + 1 \tag{19}$$
$$\frac{1}{2n} > \frac{1}{2n+1} \tag{20}$$
$$\frac{1-1/2}{n} > \frac{1}{2n+1} \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

On en déduit que le milieu de la bande son de résolution n est plus grand que la fin de la première note. □

Pour $n \geq 5$,il est également possible de supprimer les notes adjacentes au centre, en les remplaçant par la note centrale,en passant à une résolution de $2n+1$ puis en la réduisant de 2 progressivement jusqu'à réobtenir une résolution de n.

Démonstration. En passant d'une résolution de n à $2n+1$,toutes les notes sont doublées sauf la note centrale qui est triplée.En effet, en passant de n à $2n$, toutes les notes sont doublées, et lorsque l'on ajoute une note, elle est nécessairement au centre car la symétrie de la bande son doit être conservée .

Démonstration. Preuve que les notes sont doublées en passant de n notes à $2n$ notes : 1 note d'une bande de longueur n a une longueur de $1/n$ 2 note d'une bande de longueur $2n$ a une longueur de $2/2n = 1/n$ □

Ensuite,en diminuant la résolution pour passer de $n+2$ à n,la bande son crée conservera les 3 notes centrales.En effet, la note centrale de bandes son impaires ne peut pas disparaître car peu importe la résolution , la coordonnée du centre de la note centrale est $1/2$ (axe de symétrie)

On considère que la distance séparant le centre d'une note et celui de la note précédente vaut la longueur d'une note, soit $1/n$, et que pour aller du centre au bord opposé,il faut rajouter une demi-note, et cette longueur vaut $1/n + (1/2)/n = (3/2)n$.

Ainsi, la coordonnée du centre de la note précédant la note centrale de la bande de résolution n vaut $\frac{1}{2} - \frac{1}{n}$
Celle du bord gauche de la note précédant la note centrale de la bande de résolution $n+2$ vaut $\frac{1}{2} - \frac{3/2}{n+2}$
De plus, tant que $n > 4$: On obtient

$$3n > 2n + 4 \tag{23}$$
$$n > \frac{2}{3}(n+2) \tag{24}$$
$$-\frac{1}{n} > -\frac{3/2}{2+2} \tag{25}$$
$$\frac{1}{2} - \frac{1}{n} > \frac{1}{2} - \frac{3/2}{n+2} \tag{26}$$

Ainsi,la note précédent le centre de la bande son de n sera similaire à celle de la bande son de $n+2$ □

Ces deux méthodes permettent de remplacer 2 notes par 2 autres notes,et ainsi de réduire de 2 le nombre de notes distinctes de 2 avec deux méthodes indépendantes l'une de l'autre.
Ainsi, en se limitant à des bandes son de longueur impaires, si $n \geq 5$,on peut obtenir $x \in \{n-4; n-2; n\}$notes distinctes.
Pour $n = 3$, on peut voir d'après l'exemple qu'il est possible d'obtenir $x = 1$,et le cas de $n = 1$ ne peut pas avoir $x \neq 1$
La liste des x possibles n'est pas exhaustive Peut-être que tout x tel que $0 \leq x \leq n$ avec x impair est atteignable

5 Pas de restrictions sur la parité

5.1

On a vu auparavant qu'il était possible de créer des silences à partir de bandes son de longueur paire De plus, il était déjà possible de modifier la bande son de longueur 3 avec des bandes son de longueur impaires seulement.

5.2

En autorisant des bandes son de longueur paires, on permet la création de silences.
$\forall n \in \mathbf{N}$, on peut également obtenir $x = 0$ pour une bande son remplie de silences.

5.3 nombre de notes distinctes possibles

5.3.1 Création de silences

On considère x le nombre de notes distinctes,

Proposition 1. *Afin d'étudier la création de silences lors d'un passage d'une résolution m à une résolution n,on peut diviser les bandes son en plusieurs bandes son identiques dont les nouvelles résolutions m' et n' sont premières entre elles.*
Soit $k = PGCD(n, m)$, on obtient ainsi k bandes sons de résolutions $n' = n/k$ et $m' = m/k$ Par définition du PGCD ,on a donc n' et m' premiers entre eux.

On a vu que pour qu'un silence se crée, n' doit être pair. Ainsi,m' doit être impair car n' et m' sont premiers entre eux.

Théorème 2. *Lorsque n' et m' sont premiers,il se créé au plus 1 silence forcément au centre en passant de n' notes à m'. Pour créer un silence, on prend donc $n' = 2u$ et $m' = 2v + 1$ avec $(u; v) \in \mathbf{N}^2$*

Démonstration. Montrons par l'absurde qu'un silence est forcément au centre : La note centrale d'une bande son impaire d'une résolution de $2v + 1$ est la $v + 1$ème note. Ainsi,si le silence est créé à une note différente de la note centrale,
par symétrie il doit y avoir un autre silence de l'autre côté de cette note centrale, à la même distance. La présence d'un silence équivaut à la kème note équivaut à l'égalité :
$\exists y \in \mathbf{N}$, (y numéro de la note de la bande d'origine)
$2yn' = (2k - 1)m'$
On a donc un silence aux notes $k = (v + 1) - x$ et son symétrique $k' = (v + 1) + x$ ($v + 1$ axe de symétrie) Ces notes correspondent à la fin de la note y et à son symétrique la fin de la note $n' - y$(par observation) Ainsi,on déduit 2 égalités :
$\begin{cases} 2yn' = [2(v + 1 - x) - 1]m' \\ 2(n' - y)n' = [2(v + 1 + x) - 1]m' \end{cases}$
$\leftrightarrow \begin{cases} 2yn' = [2v - 2x + 1]m' \\ 2(n' - y)n' = [2v + 2x + 1]m' \end{cases}$
$\rightarrow 2n'(y + n' - y) = m'(2v - 2x + 1 + 2v + 2x + 2)$
$\rightarrow 2n'(n') = 2m'(2v + 1) \rightarrow 2n'^2 = 2m'^2$
On a donc $n' = m'$, ce qui est absurde car n'et m' sont premiers.Il n'est donc pas possible soit créé en dehors du centre de la bande son. □

Corollaire 3. *si $n' = \frac{n}{PGCD(n;m)}$ est pair donc que :* $\begin{cases} n = 2^{x+1}u, u \in \mathbf{N} \\ m = 2^x v, v = 2k + 1, k \in \mathbf{N} \end{cases}$
on déduit qu'il se créera $x = PGCD(n; m)$ comme les bandes son de longueur n et m sont divisées en $PGCD(n; m)$ bandes son de longueur n' et m' premiers entre eux . De plus, d'après la décomposition de n et m nécessaire pour créer un silence, on déduit que $PGCD(n; m) = 2^x k, k = 2l + 1, l \in \mathbf{N}$

5.3.2 n impair

On se concentre sur le cas où n est impair Soit $D(n)$ l'ensemble des diviseurs de n. D'après les propriétés précédentes,$\forall s \in D(n)$ on peut choisir m afin que $PGCD(n; m) = s$ et que $m' = \frac{m}{PGCD(n;m)}$ soit pair, ce qui conduit à la création de s silences. Ainsi, en passant de m à n notes ,On obtiendra s silences donc s notes distinctes de moins. Cela signifie qu'avant de faire les transformations vue dans le 4.3 pour réduire de 2 ou 4 le nombre de notes distinctes, on peut les réduire de tout $s \in D(n)$.
Ainsi, $\forall n$ impair on pourra donc toujours obtenir à la fin une bande son
avec x notes distinctes , $x \in \{0; n - s; n - s - 2; n - s - 4\}$, $s \in \{D(n); 0\}$ La liste des x possibles n'est pas exhaustive Peut-être que tout x tel que $0 \leq x \leq n$ est atteignable

5.3.3 n pair

Dans le cas où n est pair En utilisant la propriété de création des silences,pour créer des silences en passant de n à m notes,il est nécessaire de définir n et m tel que : $\begin{cases} m = 2^{x+1}u, u \in \mathbf{N} \\ n = 2^x v, v = 2k + 1, k \in \mathbf{N} \end{cases}$

On en déduit que $s = PGCD(n;m) = 2^x l, l \in \mathbf{N}$ On en déduit qu'il est toujours possible d'obtenir $x \in \{0; n-s\}$,,avec le s nombre de silences et $s = 0$ ou s vérifiant : $\begin{cases} s \in D(n), \\ s = 2^x k, k \in \mathbf{N} \end{cases}$
La liste des x possibles n'est pas exhaustive Peut-être que tout x tel que $0 \leq x \leq n$ est atteignable

Pistes :on pourrait peut être appliquer les transformations pour $n+1$ puis revenir à n afin d'obtenir d'autres nombres de notes distinctes.

6 image en deux dimensions

On travaille sur des transformations d'images de $n \times n'$ rectangles vers $m \times m'$ On peut donc assimiler les images à un repère orthonormé dont les abscisses et ordonnées de chaque point de cette image sont compris entre 0 et 1.

Pour étudier les transformations, on peu partir du principe que l'on se trouve en présence d'une bande horizontale d'image , dont chaque image est elle même une bande verticale. Pour toutes les transformations,on déduit que les conditions nécessaires aux transformations vues précédemment sont les même. De plus, ces conditions ont besoin d'êtres remplies dans la largeur ou la longueur, mais pas forcément les deux. Les nombres d'opérations nécessaires sont donc les même que pour les bandes son d'une dimension.

Les prochaines sections serviront à démontrer que les conditions d'obtention des transformations sont les même.

6.0.1 rectangles non distincts 2 à 2

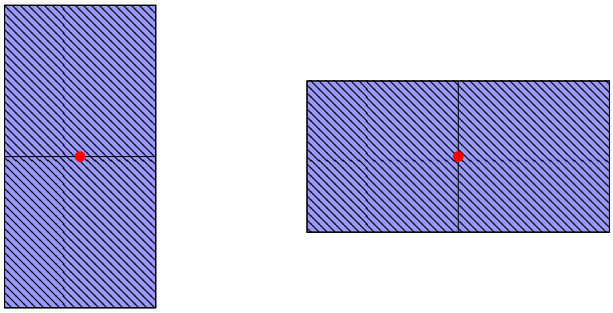
Pour que les rectangles ne soient plus distincts 2 à 2, il suffit de doubler la résolution comme avant, afin que chaque rectangle soit remplacé par 2 rectangles plus petits et identiques ,mais il n'est pas nécessaire de la doubler dans les deux sens.

6.0.2 apparition d'un silence

Le centre de chaque note est : -sur l'axe vertical qui coupe la note en deux, c'est à dire le milieu de la longueur de la note.
-sur l'axe horizontal qui coupe la note en deux, c'est à dire le milieu de la hauteur de la note. Dans les bandes son horizontales, le centre de la note de la nouvelle bande devait se trouver sur l'emplacement qui correspond à l'espace entre les notes de l'ancienne bande afin de créer un silence. Pour les image ,le centre du rectangle doit également se trouver à un emplacement qui correspond à l'espace entre deux rectangles de l'ancienne image. On peut donc déduire que les conditions pour créer un silence sont les même. Cependant,le milieu de la note peut créer un silence à cause de son emplacement sur la longueur mais aussi de sa hauteur. On a déjà étudié les conditions sur l'axe horizontal, et pour étudier l'axe vertical, il suffit de faire une rotation qui nous renvoie à un axe horizontal déjà étudié.

Ainsi, pour la création d'un silence en passant de $n \times n'$ à $m \times m'$,il faut que la condition : $\exists (x,k) \in \mathbf{N}^2, 2xn = (2k-1)m$ soit respectée par le couple $(n;m)$ ou $(n';m')$

Voici des exemples simples(les points rouges sont les centres des nouveaux rectangles)



Cas 1 : 1×2 vers 1×1 , cas 2 : 2×1 vers 1×1
$2n' = (2-1)m'$, $2n = (2-1)m$

On en déduit que les conditions sont les mêmes pour créer un rectangle entièrement noir qu'une bandes son entièrement remplie de silences. La façon de faire disparaître un silence ensuite reste la même également.

6.0.3 rectangles identiques

De la même façon que les bandes sons, soit on passe par $n = n' = 1$, soit on crée une bande son remplie de silences uniquement.

6.1 modification de bandes son

Les modifications de bandes son sont les mêmes qu'avec des bandes de musique. De, pour savoir le de rectangles distincts à la fin d'opérations sur une image, on doit compter le nombre de rectangles distincts x' sur une bande verticale, et le multiplier par le nombre de bande verticales distinctes$x$. En effet, lorsque l'on part d'une image dont tous les rectangles sont distincts,après plusieurs opérations, deux bandes adjacentes peuvent être soit totalement différentes , soit totalement identiques.

Démonstration. Comme les notes font toutes la même taille, si le centre d'un rectangle correspond à un rectangle d'origine,les centres des notes située sur la même ligne/colonne correspondent à des rectangles situés sur la même ligne/colonne que le rectangle d'origine. Ainsi,si un rectangle copie la note qui était à l'origine située un rectangle plus à gauche/droite ,tous les rectangles de la colonne effectueront également une copie vers la gauche. □

De cette façon, on obtient qu'à partir d'une image de $n \times n'$, il est toujours possible d'obtenir un nombre d de notes distinctes tel que $d = xx'$ avec x parcourant tous les nombres possibles de rectangle distincts sur un ligne de n notes, et x' parcourant tous les nombres possibles de rectangle distincts sur un ligne de n' notes Les nombre x de rectangles distincts possibles sur une ligne de n rectangle sont les mêmes que les nombres de notes distinctes sur une bande son de n notes