

Rapport de l'équipe $\mathbb{KRD}$

$\mathbb{K}$arré d'or

Problème 5 : Angles entiers

Résumé

Ce problème de géométrie s'intéresse aux angles formés entre chaque triplet d'un ensemble de points. Dans la première partie, l'angle est dit entier si sa mesure en degré est entière. Nous nous sommes intéressés, par des considérations géométriques, aux polygones réguliers, puis avons essayés élargir aux autres polygones. Nous avons également réfléchi à la disposition des points sur des droites particulières, en travaillant notamment avec de la trigonométrie. Toutes les phases de recherche ont commencé par des schémas. Nous avons essayé de répondre aux questions 1,2,5,6,7 et 8.

Dans un polygone régulier à n côtés, la valeur des angles intérieurs vaut $180 - \frac{360}{n}$ degrés.

Dans un polygone à n cotés, la somme des mesures des angles intérieurs vaut $180(n-2)$ degrés.

1 Question 1

1. Exemples :
   - pour $n = 3$: Les triangles équilatéraux ont des angles égaux, qui mesurent chacun 60°. Il n'y a qu'un seul triplet de points, qui est aux angles entiers.

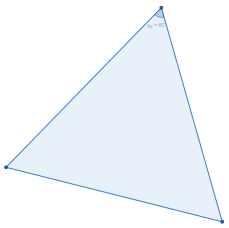


FIGURE 1 – $n = 3$

   - pour $n = 4$: Les carrés ont quatre angles égaux, qui mesurent chacun 90°. On peut aussi le voir comme deux triangles isocèles rectangles, qui est le seul triplet possible. Les angles sont alors 90° et deux fois 45° .

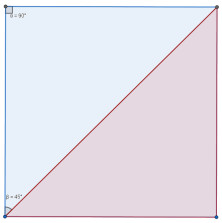


FIGURE 2 – $n = 179$

   pour $n = 5$: Le pentagone régulier est l'association de deux types de triangles isocèles, d'angles 108° et 36° ou 36° et 72°. Pour chaque triplet de points, les angles formés ont bien des mesures entières.

   pour $n = 6$: L'hexagone régulier est composé de 4 triangles.

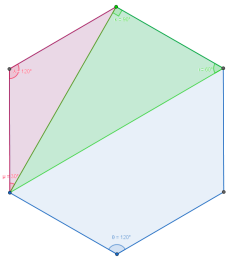


FIGURE 3 – $n = 6$

   pour $n = 7$: les angles extérieurs du polygone ne sont pas entiers et donc $n = 7$ ne fonctionne pas.

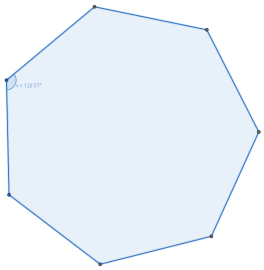


FIGURE 4 – $n = 7$

pour $n = 8$: le premier triangle isocèle formé n'est pas aux angles entiers donc $n = 8$ ne fonctionne pas non plus.

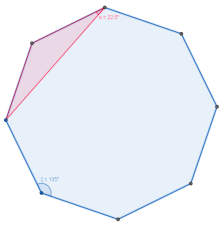


FIGURE 5 – $n = 8$

pour $n = 9$: il existe quatre types de triangles formés : deux isocèles, de 20° et 140° ou 20° et 80°, et deux quelconques, de 20°, 120° et 40° ou de 20°, 100°et 60°.

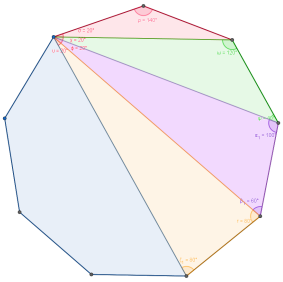


FIGURE 6 – $n = 9$

2. Pour tout polygone régulier, ses n côtés sont de même longueur, et ses n angles de même mesure.

On sait que l'angle intérieur est de $\frac{360}{n}°$. Il est alors nécessaire – mais insuffisant – que n divise 360. Raisonnons avec l'angle au centre. Soit T un polygone régulier de centre O. Posons A, C deux points consécutifs du polygone régulier. Posons B tel que l'angle $\widehat{ABC}$ est un angle inscrit dans le polygone T. Selon l'angle au centre, l'angle est soit la moitié de l'angle $\widehat{AOC}$, soit son complémentaire à 180° (l'angle $\widehat{COA}$). Le polygone est donc aux angles entiers si et seulement si $\widehat{AOC}$ est toujours égal à un nombre entier pair de degrés. Or, cet angle est un multiple entier de l'angle obtenu en prenant A et C consécutifs. Il est donc de mesure $\frac{360}{n}°$. En définitive, il faut et il suffit donc que $\frac{360}{n}$ soit pair, i.e. n divise 180. L'ensemble des solutions est donc : $S = \{3; 4; 5; 6; 9; 10; 12; 15; 18; 20; 30; 36; 45; 60; 120; 180\}$.

2 Question 2

1. Polygone régulier : Selon ce qui a été vu précédemment, le maximum est 180 côtés. Les angles extérieurs du 180-gone mesurent alors 178°.
2. Polygone non régulier : Tous les angles n'ont pas la même mesure, et l'angle maximal reste 179°. Il s'agit toujours d'avoir des angles les plus grands possibles pour avoir un maximum de côtés. Il est possible de reprendre le 180-gone régulier, et de lui enlever un point. On obtient alors 179-gone non régulier aux angles entiers. En effet, tous les angles entre triplets de points sont entiers, car ils n'ont pas étés modifiés par rapport au polygone régulier.



FIGURE 7 – $n = 179$

3 Question 5

Soient deux droites parallèles. On les nomme δ_1 et δ_2

Les polygones ne sont plus convexes, et peuvent donc comporter des angles de 180° entre trois points consécutifs. Donc tout triangle formé d'un triplet de points appartenant à une même droite δ_1 possède des angles entiers. Cependant, l'ensemble des points n'est pas aux angles entiers, car ils sont tous alignés. Il s'agit donc de trouver un point sur la droite δ_2 qui vérifie la formation d'angles entiers avec chacun des points de δ_1. On peut placer 179 points sur δ_1 et un 180e sur δ_2. Les points sont placés de telle sorte que les angles formés soient entre 1° et 179°. Peut-être existe-t-il une meilleure disposition.

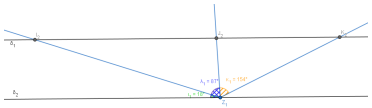


FIGURE 8 – $n = 179$

Si l'on exige qu'il y ait autant de points sur chaque droite, on peut penser que placer les points face à face, c'est à dire tels que les droites formées soient perpendiculaires à δ_1 et δ_2, est la meilleure solution.

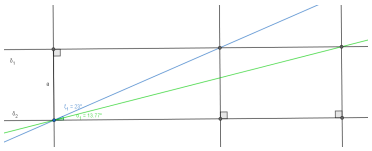


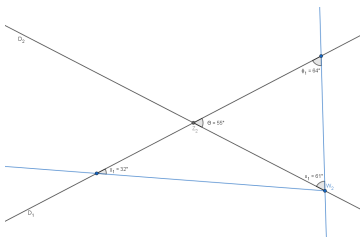
FIGURE 9 – $n_{max} = 4$

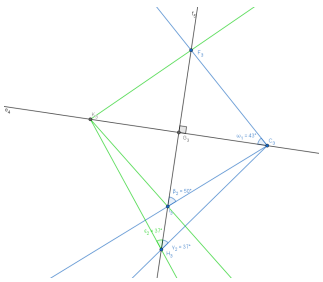
Selon cette disposition, le nombre maximal de points est 4 (un carré ou un rectangle). En effet, d'après le résultat du programme Python suivant, il n'existe pas de positionnement de points tel que deux angles consécutifs soient de mesure entière.

```
from math import*
n=0
for i in range(180):
    n=n+1
    for j in range(1,180-n):
        a=degrees(atan(tan(n+j)-tan(n)))
        if a==int(a): print (i,j,a)
```

4 Question 6

Tout comme pour la question précédente, les angles plats sont autorisés, ce qui permet d'avoir un ensemble de points aux angles entiers composé de 179 points, de la même façon qu'à la question 5. On peut cependant rajouter le symétrique de M par rapport au point d'intersection de δ_1 et δ_2 dans le cas où $\theta = 90°$. Il y a ainsi 180 points aux angles entiers. Il peut être plus avantageux de "sauter" quelques angles, et ainsi mettre plus de deux points sur δ_2.





En imposant qu'il y ait autant de points sur chaque droite, on peut peut-être chercher des conditions sur les distances en fonction des angles.

5 Question 7

Toute la question peut se calquer sur ce qui a été fait précédemment. Pour la question 1, on obtient les diviseurs de $\frac{400}{2}$, soit de 200. Les solutions sont donc 4, 5, 8, 10, 20, 25, 40, 50, 100 et 200. Si l'on reprend le raisonnement de la question 2, le $n-$gone régulier a au maximum 200 sommets, et le non régulier 199 sommets.
On remarquera que des polygones réguliers usuels ne sont pas réalisables, comme le triangle équilatéral ou l'hexagone régulier.

6 Question 8

- Nous pouvons réfléchir à partir de la mesure en radians. On sait que π n'est pas rationnel. Supposons que l'on place des points sur le cercle trigonométrique avec des angles entiers pairs. Alors, selon le théorème de l'angle au centre on obtient que les angles aux sommets seront entiers, à un multiple de 2π près. Donc on peut placer autant de points que l'on veut, formant ainsi un n-gone non nécessairement régulier avec n aussi grand qu'on veut.
- On peut aussi demander que lorsque tous les points du plan sont reliés entre eux, les intersections aient des mesures d'angles entières.